Répétition du cours d'Analyse III, 2e partie
3ème BM
4 Mars 2010

1. Déterminer la structure générale des distributions dans $\mathbb{R}$ dont le support est formé d'un nombre fini de points.

2. Déterminer les distributions u de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui vérifient les équations suivantes (Y désigne la fonction caractéristique de $[0, +\infty[$) :

   (a) $xu = 0, \qquad xu = 1, \qquad xu = \delta_0, \qquad xu = u, \qquad x^2u + u = 0, \qquad x^2u = u$
   (b) $Du = \delta_0, \qquad Du = u_Y, \qquad xDu = u_Y, \qquad xDu = \delta_0$
   (c) $xDu + u = 0, \qquad xDu + u = \delta_0, \qquad Du + u = \delta_0, \qquad D^2u = \delta_0,$
   $D^2u + u = \delta_0$.

3. Soient u une distribution dans $\mathbb{R}^n$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que l'on a

$$\varphi u = 0 \Rightarrow u(\varphi) = 0$$

   mais que la réciproque est fausse.

4. Soit u une distribution dans Ω et $f \in C_\infty(\Omega)$ tel que $[u] \cap [f]$ soit compact. Démontrer que l'on a encore

$$(D^\alpha u)(f) = (-1)^\alpha u(D^\alpha f).$$

   Si en outre $g \in C_\infty(\Omega)$ est tel que $[u] \cap [g]$ est compact et $f = g$ dans un voisinage du support de u, alors $u(f) = u(g)$.