

Les réponses aux questions ci-dessous doivent être justifiées.

1. Dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, déterminer

$$D^2\delta_0 * u_{|\cdot|}.$$

2. Soit

$$f(x) = \begin{cases} 2xe^x & \text{si } x \leq 0 \\ xe^x & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Si u désigne la distribution associée à f et si P est l'opérateur de dérivation $P(D) = D^2 - 2D + 1$, calculer la distribution

$$P(u * \delta_1).$$

3. Soit u_m ($m \in \mathbb{N}$) une suite de distributions dans \mathbb{R} telle que $u_m(\varphi)$ ($m \in \mathbb{N}$) converge quel que soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et soit une suite φ_m ($m \in \mathbb{N}$) d'éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui converge dans cet espace. Que peut-on dire de la convergence de la suite

$$u_m * \varphi_m \quad (m \in \mathbb{N})?$$

4. Soient u, v deux distributions dans \mathbb{R}^n et soit $a \in \mathbb{R}^n$. On définit f par $f(x) = e^{\langle a, x \rangle}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Si u, v sont composables, montrer que fu et fv sont aussi composables et que l'on a

$$f(u * v) = (fu) * (fv).$$

5. Si u est une distribution dans \mathbb{R}^n , si f est de classe C_∞ dans \mathbb{R}^n et si les supports de u et de f sont composables, montrer que les distributions $u * u_f$ et u_{u*f} sont les mêmes.

6. Dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, on pose

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln |(x, y)|.$$

Montrer que cette fonction définit une distribution dans \mathbb{R}^2 . Celle-ci est-elle tempérée?

Si χ désigne la fonction caractéristique de la boule unité, et si u désigne la distribution associée à f , déterminer

$$\Delta u, \quad \Delta(u * u_\chi)$$

7. Si une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ converge dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, converge-t-elle dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$?

Si une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ converge dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, converge-t-elle dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$?

8. - Soit une distribution tempérée u . Dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, déterminer $\mathcal{F}^-(D^2u - 4\pi^2u)$.

- Dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, résoudre $D^2u - 4\pi^2u = 0$.

- Dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, résoudre $D^2u - 4\pi^2u = 0$.

9. (i) Les fonctions suivantes définissent-elles des distributions? Pourquoi?

(ii) Ces fonctions définissent-elles des distributions tempérées? Pourquoi?

(iii) Pour chacun des cas où la réponse est affirmative au point (ii), déterminer la transformée de Fourier de ces distributions.

$$\frac{1}{|x|} \quad (x \in \mathbb{R}) \text{ (resp. } x \in \mathbb{R}^2); \quad e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R}); \quad e^{-i\pi x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$