**Répétition du cours d'Analyse III, 2e partie**
**3ème BM**
**25 Mars 2010**

1. Soient $a$, $b \in \mathbb{R}^n$. Calculer si possible $\delta_a * \delta_b$.
2. Montrer que les expressions suivantes ont un sens et les comparer
$$(u_1 * D\delta_0) * u_Y, \quad u_1 * (D\delta_0 * u_Y)$$
( $Y$ désigne la fonction caractéristique de l'intervalle $]0, +\infty[$).
3. (a) Les distributions dans $\mathbb{R}$ suivantes sont-elles tempérées ? En calculer alors la transformée de Fourier.
$$u_{f_1}, \qquad u_{f_2} \qquad u_{f_3}, \qquad u_{f_4},$$
où $f_1(x) = C$ $(C \in \mathbb{C})$, $f_2(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, $f_3(x) = e^{-x}$, $f_4(x) = e^{i\pi x}$. Par abus de notation, on dénote ces distributions respectivement par
$$u_C, \qquad u_{x^n}, \qquad u_{e^{-x}}, \qquad u_{e^{i\pi x}}.$$
(b) Déduire du point précédent que tout polynôme définit une distribution tempérée et en calculer la transformée de Fourier.
4. On pose
$$u_1 = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-1}) \qquad \text{et} \qquad u_m = u_{m-1} * u_1 \quad \forall m \geq 2.$$
(a) Exprimer $u_m$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ en terme d'une combinaison linéaire de masses de Dirac.
(b) Si cela a un sens, calculer la transformée de Fourier de $u_m$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. Démontrer qu'il s'agit d'une distribution associée à une fonction de classe $C_\infty$ sur $\mathbb{R}$.
5. Soit $u$ une distribution tempérée dans $\mathbb{R}$.
(a) Montrer, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, que la distribution $D^\alpha u$ est aussi tempérée.
(b) Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, on a
$$\mathcal{F}^{\pm}(D^\alpha u) = (\mp i)^\alpha f_\alpha \mathcal{F}^{\pm} u, \quad D^\alpha(\mathcal{F}^{\pm} u) = (\pm i)^\alpha \mathcal{F}^{\pm}(f_\alpha u)$$
où $f_\alpha(x) = x^\alpha$ $(x \in \mathbb{R})$.
(c) Montrer que si $u$ est associée à $f \in L^2(\mathbb{R})$, alors la transformée de Fourier de $u$ est associée à la transformée de Fourier de $f$.
(d) Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on pose $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(-x)$ $(x \in \mathbb{R})$. Si $u$ vérifie[1] $u(\varphi) = u(\tilde{\varphi})$ (resp. $u(\varphi) = -u(\tilde{\varphi})$) pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ alors la transformée de Fourier de $u$ vérifie la même propriété.

1. On dit respectivement que $u$ est pair, impair.