
Les réponses aux questions ci-dessous doivent être justifiées.

1. Montrer que les dérivées d'une distribution tempérée sont aussi des distributions tempérées. En déterminer la transformée de Fourier.
2. Montrer que la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto |x|$ définit une distribution tempérée et en déterminer la transformée de Fourier.
3. On se place dans \mathbb{R}^2 et on donne les fonctions suivantes

$$f_1(x, y) = \frac{1}{|x| + |y|}, \quad f_2(x, y) = \frac{1}{|xy|}, \quad f_3(x, y) = \frac{1}{|(x, y)|}, \quad f_4(x, y) = e^{ix}$$

$$f_5(x, y) = \cos x, \quad f_6(x, y) = e^x, \quad f_7(x, y) = xy, \quad f_8(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0, y \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{si } x < 0, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Parmi ces fonctions, quelles sont celles qui définissent des distributions tempérées?

4. Si possible, déterminer les transformées de Fourier des distributions associées aux fonctions $f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8$.
5. Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Montrer que si la distribution fu est nulle alors $u(f) = 0$ mais que la réciproque est fausse.