Université de Liège
Département de Mathématique

# Analyse III, 2ème partie

3ème année de bachelier en sciences mathématiques

Année académique 2006-2007

Notes préparées par F. BASTIN notamment à partir du cours de licence (1996 et 2000) de P. LAUBIN

# Chapitre 1

# Introduction

Pour des renseignements complémentaires d'ordre général et des références, nous renvoyons (notamment) au livre d'Egorov et Shubin [4] et à l'Encyclopaedia Universalis. Nous renvoyons aussi au livre de Dautray et Lions [3] pour une présentation générale de la théorie classique.

Les notations $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0$ désignent respectivement l'ensemble des naturels et celui des naturels non nuls. L'ensemble des fonctions indéfiniment continûment dérivables sur un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$ est noté $C_\infty(\Omega)$ et le sous-ensemble formé par les fonctions dont le support est un compact de $\mathbb{R}^n$ inclus dans $\Omega$ est noté $D(\Omega)$ (on rencontre aussi parfois la notation $C_0^\infty(\Omega)$).

## 1.1 Définitions et exemples

Une équation aux dérivées partielles linéaire est une équation de la forme

$$Au = f$$

où $f$ est une fonction (ou une distribution) connue, définie dans un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$ et $A$ est un opérateur différentiel linéaire dans $\Omega$ c'est-à-dire un opérateur de la forme

$$A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

où $\alpha$ est un multi-indice ($\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \alpha_j \in \mathbb{N}$), $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$, $a_\alpha$ est une fonction définie dans $\Omega$ et $u$ est une fonction (ou une distribution) inconnue. Le plus petit $m$ possible tel que $a_\alpha \neq 0$ avec $m = |\alpha|$ est appelé l'ordre de l'opérateur et de l'équation.

Donnons quelques exemples.

*L'équation des ondes* est l'équation

$$D_t^2 u = c^2 \Delta u$$

où $u = u(t,x)$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\Delta = \sum_{j=1}^n D_{x_j}^2$ est le Laplacien dans $\mathbb{R}^n$ et $c > 0$ est une constante. Pour $n = 3$, cette équation décrit une grande variété de processus de propagation d'ondes dans un espace homogène et isotrope; dans ce cas, $c$ est la vitesse de propagation des ondes. Par exemple, l'intensité d'un champ électrique dans le vide vérifie cette équation, tout comme la pression et la densité d'un gaz soumis à de petites vibrations acoustiques. Pour $n = 2$, cette équation décrit par exemple les petites vibrations d'une membrane élastique. Pour $n = 1$, elle décrit les vibrations d'une corde ou d'une baguette.

*L'équation de la chaleur* est l'équation

$$D_t u = a^2 \Delta u$$

où $u = u(t,x)$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\Delta = \sum_{j=1}^n D_{x_j}^2$ est le Laplacien dans $\mathbb{R}^n$ et $a > 0$ est une constante. Avec $a = \frac{k}{c\rho}$, cette équation décrit la température $u(t,x)$ d'un milieu formé d'une substance de densité $\rho$, de conductivité thermique $k$ et de chaleur spécifique $c$.

*Equations de Laplace et de Poisson.* L'équation de Laplace est l'équation homogène

$$\Delta u = 0$$

où $u = u(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ et $\Delta$ est le Laplacien. L'équation inhomogène correspondante

$$\Delta u = g$$

est l'équation de Poisson. Ces équations apparaissent dans diverses situations. Par exemple, la distribution de température dans un milieu homogène (distribution indépendante du temps) vérifie l'équation de Laplace alors qu'en présence de sources extérieures, c'est l'équation de Poisson qui est vérifiée. Le potentiel d'un champ électrostatique satisfait l'équation de Poisson avec une fonction $g$ proportionnelle à la densité de charge.

*L'équation de Helmholtz* est l'équation

$$(\Delta + k^2)u = 0$$

où $u = u(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\Delta$ est le Laplacien et $k > 0$. Cette équation apparaît notamment dans l'étude des solutions de l'équation des ondes qui ont la forme particulière $e^{i\omega t}u(x)$ avec $\omega = k/c$. Elle est aussi importante dans le contexte des problèmes spectraux, par exemple dans le problème des valeurs propres du Laplacien. Un problème simple dans ce domaine est celui du problème des valeurs propres dans un ouvert borné $\Omega$ compte tenu de la condition de Dirichlet sur le bord de $\Omega$:

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u \\ u|_{\partial\Omega} &= 0. \end{cases}$$

*Les équations de Maxwell.* Les phénomènes électromagnétiques dans le vide sont décrits à l'aide de deux applications (ou distributions) définies dans $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$, appelées champ électrique et induction magnétique. Ces applications sont reliées à deux applications $\rho$ et $\overrightarrow{j}$ définies également sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, avec $\rho(x,t) \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{j}(x,t) \in \mathbb{R}^3$, appelées respectivement densité de charge et densité de courant, par les équations de Maxwell (dans le système d'unité naturel)

$$\begin{cases} \operatorname{div} \overrightarrow{E} & = & \rho \\ \operatorname{div} \overrightarrow{B} & = & 0 \\ \operatorname{rot} \overrightarrow{B} - D_t \overrightarrow{E} & = & \overrightarrow{j} \\ \operatorname{rot} \overrightarrow{E} + D_t \overrightarrow{B} & = & 0. \end{cases}$$

*L'équation de Schrödinger* est l'équation fondamentale de la mécanique quantique non relativiste. Dans le cas simple d'une particule sans spin dans un champ extérieur, elle a la forme

$$ih_0 D_t \psi = -\frac{h_0^2}{2m}\Delta\psi + V(x)\psi$$

où $x \in \mathbb{R}^3$, $\psi = \psi(x,t)$ est la fonction d'onde de la particule quantique, donnant l'amplitude complexe caractérisant la présence de la particule en chaque point $x$ ($|\psi(x,t)|^2$ est interprété comme la densité de probabilité de la particule d'être au point $x$ à l'instant $t$), $m$ est la masse de la particule, $h_0$ est la constante de Planck et $V$ est le potentiel extérieur. Comme dans le cas de l'équation des ondes et de l'équation de Helmholtz, la recherche de solutions de la forme $e^{-\frac{i}{h_0}Et}\psi(x)$ (où $E$ est une constante) donne lieu à l'équation

$$\left(-\frac{h_0^2}{2m}\Delta + V(x)\right)\psi(x) = E\psi(x).$$

*L'équation de Cauchy-Riemann.* On considère des fonctions à valeurs complexes d'une variable complexe. Avec la notation $D_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(D_x + iD_y)$, l'équation de Cauchy-Riemann est l'équation

$$D_{\bar{z}} u = 0;$$

dans le cas non homogène, cette équation devient

$$D_{\bar{z}} u = g.$$

La première équation joue un rôle primordial dans la théorie des fonctions holomorphes. Il existe des généralisations importantes de cette équation dans le cadre de l'analyse complexe multidimensionnelle (et en physique mathématique).

Dans les exemples qui précèdent, la modélisation du problème physique est incomplète en ce sens où, la plupart du temps, il faut imposer des conditions initiales, des conditions de comportement des solutions sur le bord de l'ouvert. Ces problèmes sont alors appelés "problèmes aux limites" ou problèmes avec conditions au bord, ou initiales (en anglais: "boundary value problems").

## 1.2 Problème bien posé

Le concept du “problème bien posé” pour un problème aux limites a été introduit par Hadamard[1]. Le nombre de conditions initiales ou sur le bord peut être différent pour des équations différentes et dépend essentiellement de l'ordre de l'équation. Si le nombre de conditions est insuffisant, il se peut que le problème soit vérifié par des fonctions n'ayant aucune relation avec le problème physique sous-jacent. Si le nombre de conditions est excessif, il se peut que le problème n'admette pas de solution. Le modèle mathématique ne peut être considéré comme satisfaisant que dans le cas où, pour certaines données, le problème aux limites a une solution unique. Cependant, on demande davantage car la modélisation de la situation physique demande des mesures, lesquelles ne sont jamais parfaites et contiennent des erreurs. Les problèmes sont alors considérés comme bien posés si une petite modification des données conduit seulement à une petite modification de la solution.

Voici un exemple dû à Hadamard.

*Exemple (Hadamard).* Dans le plan $\mathbb{R}^2$ des variables $(t, x)$ on considère l'équation de Laplace ($\varphi$ donné, continu sur $\mathbb{R}$)

$$D_x^2 u + D_t^2 u = 0, (x, t \in \mathbb{R} \times ]0, +\infty[), \quad u(0, x) = 0,\ D_t u(0, x) = \varphi(x).$$

On montre que ce problème aux limites a une solution unique dans $C^2(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$. Pour tout naturel $n$, la fonction

$$u_n(t, x) = e^{-\sqrt{n}} \sin(nx)\ e^{nt}$$

vérifie l'équation et les conditions aux limites lorsque

$$\varphi(x) = \varphi_n(x) = e^{-\sqrt{n}} n\ \sin(nx).$$

On a cependant les comportements suivants:

$$\forall \varepsilon\ \exists N > 0 : \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi_n(x)| \leq \varepsilon,\ \forall n \geq N$$

et

$$\forall t > 0,\ \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_n(t, x)| = e^{nt - \sqrt{n}} \to +\infty \text{ si } n \to +\infty.$$

On adopte en général la définition suivante pour les problèmes bien posés.

Soient $U, V, F$ des espaces vectoriels topologiques tels que $U \subset V$. Notons $u$ une solution et $f$ les données (il se peut que ce soient des fonctions à valeurs vectorielles).

**Définition 1.2.1** *Un problème aux limites est dit bien posé lorsque*

- *pour tout $f \in F$, il existe une solution $u \in U$ du problème aux limites*

[1]Jacques Hadamard: mathématicien français (Versailles 1865-Paris 1963). Figure de proue de l'école française de théorie des fonctions, il a joué un rôle fondamental dans la création de l'analyse fonctionnelle.

- *cette solution est unique*
- *la loi $F \to V \quad f \mapsto u$ est continue.*

Par exemple, le problème suivant

$$\begin{cases} D_t^2 u &= c^2 D_x^2 u, \; x \in \mathbb{R}, t \in [0,T] \\ u(0,x) &= \varphi(x), \; x \in \mathbb{R} \\ D_t u(0,x) &= \psi(x), \; x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

porte le nom de “problème de Cauchy pour l'équation des ondes à une dimension” et on montre qu'il est bien posé avec les espaces normés $U = V = C_b^k([0,T] \times \mathbb{R})$ et $F = C_b^k(\mathbb{R}) \times C_b^{k-1}(\mathbb{R})$ ou même des espaces plus grands (qui sont alors de Fréchet: espaces de fonctions dérivables localement bornées, espaces $L^p_{loc}$).

On montre aussi que l'exemple d'Hadamard ne peut pas être bien posé dans des espaces de type $C^k$. Par contre, c'est possible quand on fait appel à des conditions sur la transformée de Fourier des données. Cependant, la manipulation de topologies naturelles de tels espaces est très délicate.

Dans la littérature précitée, on trouve d'autres exemples de problèmes bien posés et rencontrés dans la pratique (lorsque les données ne sont pas si régulières). Ils font notamment appel aux

*espaces de Sobolev et à la théorie des distributions.*

La littérature consacrée aux problèmes relatifs aux équations aux dérivées partielles est très vaste. Des théorèmes généraux d'existence et d'unicité de solutions s'y retrouvent, comme le résultat de Cauchy-Kowalewska, historiquement le premier théorème d'existence et d'unicité. Dans ces résultats fondamentaux, apparaissent les notions de surface caractéristique, d'opérateur elliptique, hyperblique, parabolique. Ces notions sont assez techniques et lourdes à introduire en toute généralité pour un premier cours comme celui-ci. De plus, excepté une première classification adoptée aux environs de 1900 pour des opérateurs à coefficients constants d'ordre deux à variables et coefficients réels[2], il n'est pas connu de classification complète ou reconnue unanimement.

## 1.3 Distributions

Il est fréquent de rencontrer des fonctions non dérivables dans des problèmes où le calcul différentiel serait bien utile. L'expérience montre que l'application brutale des techniques du calcul différentiel et intégral dans des situations où elles ne sont pas justifiées peut donner lieu à des résultats intéressants ou à des non-sens.

[2]Si $P(D)$ est un tel opérateur, on pose (partie principale de $P$) $P_0(D) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} D_i D_j$. La forme quadratique associée est la forme $P_0(\xi) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_i\xi_j$. Si cette forme quadratique est de rang $n$ et de type elliptique, on dit que l'opérateur est de type elliptique; si elle est de rang $n$ et de type hyperbolique, l'opérateur est dit hyperbolique; si elle est de rang $n-1$ et de type elliptique, l'opérateur est dit parabolique.

Tout comme l'ensemble des nombres complexes étend l'ensemble des nombres réels et permet d'extraire des racines carrées sans restriction, la théorie des distributions fournit un nouveau cadre qui justifie certains calculs illicites dans le cadre restreint des fonctions. La théorie des distributions est devenue un outil très puissant notamment à la suite des travaux de Laurent Schwartz (années 50), lequel a su en présenter tout l'intérêt pratique tout en établissant une théorie mathématique rigoureuse.

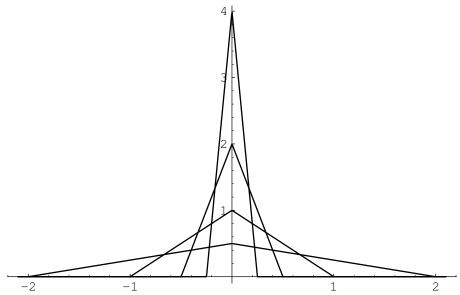
Donnons quelques exemples introductifs posant des problèmes qui seront résolus lorsque les distributions seront étudiées.

a) Pour tout $m > 0$, considérons l'équation différentielle

$$\begin{cases} D^2 u_m + u_m = f_m \\ u_m = 0 \quad \text{si } x < -1/m \end{cases} \tag{1.1}$$

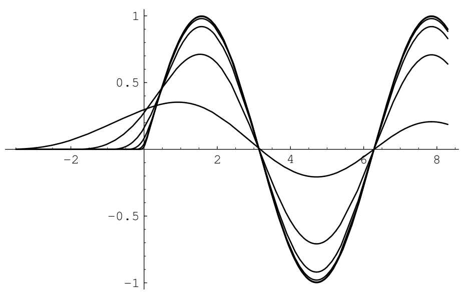
avec

$$f_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |x| \geq 1/m, \\ m\,(1 - m|x|), & \text{si} \quad |x| \leq 1/m. \end{cases} \tag{1.2}$$



La suite de fonctions $f_m$.

Pour tout $m$, la fonction $f_m$ est d'intégrale égale à 1 et son support est $[-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}]$. L'équation (1.1) est celle d'un oscillateur harmonique initialement à la position d'équilibre et qui est perturbé par une impulsion d'intégrale constante mais de plus en plus concentrée au voisinage de 0. Ses solutions $u_m$ sont représentées ci-dessous pour $m = 1/4, 1/2, 1, 2, 4, 8$.



Convergence des solutions $u_m$ de (1.1).

On constate que $u_m$ converge vers la fonction

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0, \\ \sin x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

si $m \to +\infty$. Cette fonction n'est pas de classe $C_2$. Peut-on écrire une équation limite analogue à (1.1) pour la fonction $u$? Cette équation modéliserait une impulsion instantanée. Quel en serait le second membre?

b) La relation fondamentale entre dérivation et intégration

$$f(x) = f(a) + \int_a^x Df(t)\,dt, \quad a, x \in I, \tag{1.3}$$

est valable pour tout intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ et toute fonction $f \in C_1(I)$.

Il existe des fonctions dérivables dont la dérivée n'est pas localement intégrable. Dans le cadre du calcul intégral classique, il n'est donc pas possible de généraliser cette formule aux fonctions qui ne sont que dérivables.

Elle possède pourtant des généralisations naturelles. Par exemple, elle reste correcte pour tous $a, x$ si

$$f(x) = x\chi_{]0,+\infty[}(x) \text{ et } \text{“}Df(x) = \chi_{]0,+\infty[}(x)\text{”}.$$

Pour la fonction $f = \chi_{]0,+\infty[}$, la “dérivée” de $f$ devrait être nulle en dehors de 0 donc presque partout. La formule (1.3) n'est cependant pas valable pour $f = \chi_{]0,+\infty[}$ et “$Df = 0$”.

On pourrait penser que la continuité de $f$, l'existence d'une dérivée en presque tout point et l'intégrabilité de cette dérivée suffisent pour la validité de la formule (1.3). Cependant, on peut montrer qu'il existe une fonction $f \in C_0([0,1])$ strictement croissante qui est dérivable presque partout et dont la dérivée est nulle presque partout. La formule (1.3) est clairement violée par cette fonction.

Il ne semble pas exister de généralisation maximale et convaincante de (1.3) dans le cadre strict des fonctions.

c) Les solutions classiques de l'opérateur des ondes

$$(D_t^2 - D_x^2)u(t,x) = 0$$

sont les fonctions deux fois continûment dérivables dans $\mathbb{R}^2$ qui vérifient cette égalité en tout point. Ce sont en fait les fonctions de la forme

$$u(t,x) = f(t-x) + g(t+x)$$

où $f$ et $g$ sont de classe $C^2$ dans $\mathbb{R}$.

Cependant, par exemple dans l'étude des chocs, il est utile aussi de considérer qu'une telle fonction est aussi solution de l'opérateur des ondes même si $f$ et $g$ ne sont que continus ou même localement intégrables. D'autre part, la forme de l'équation semble indiquer que si $u$ est une solution, alors $D_t u$ et $D_x u$ sont aussi solutions. Ce n'est pas vrai si on impose que $u$ soit de classe $C^2$.

Ce type de problème a été résolu bien avant l'apparition de la théorie des distributions par le concept de solution faible. En fait, l'équation ci-dessus est équivalente à

$$\int_{\mathbb{R}^2} u(t,x)\ (D_t^2 - D_x^2)\varphi(t,x)\ dt\ dx \ = \ 0$$

pour tout $\varphi \in D(\mathbb{R}^2)$. Cette nouvelle formulation a un sens pour toute fonction localement intégrable $u$ et admet comme solutions toutes les fonctions considérées ci-dessus.

La théorie des distributions va au-delà de la notion de solution faible en remplaçant de manière systématique la notion de fonction par celle de fonctionnelle sur un ensemble de fonctions test.

d) P. Dirac définit sa fonction généralisée par la relation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0) \tag{1.4}$$

pour toute fonction $\varphi \in D(\mathbb{R})$. Les règles du calcul intégral interdisent l'existence d'une telle fonction[3] $\delta \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

Par contre, une suite de fonctions peut approcher la propriété demandée par (1.4).

Considérons par exemple les fonctions $f_m$ définies en (1.2). Il vient

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f_m(x)\varphi(x)\,dx &= m\int_{-1/m}^{1/m}(1-m|x|)\,\varphi(x)\,dx \\
&= \int_{-1}^{1}(1-|x|)\,\varphi(\frac{x}{m})\,dx \\
&\to \varphi(0)\int_{-1}^{1}(1-|x|)\,dx = \varphi(0)
\end{aligned}$$

si $m \to +\infty$ en vertu du théorème de Lebesgue.

Cette propriété est réalisée par de nombreuses suites de fonctions. Par exemple, les fonctions gaussiennes

$$g_m(x) = \sqrt{\frac{m}{\pi}}\,e^{-mx^2} \tag{1.5}$$

conviennent également car

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_m(x)\varphi(x)\,dx \ = \ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\varphi(\frac{x}{\sqrt{m}})\,dx \to \varphi(0)$$

si $m \to +\infty$.

[3] L'intégrale de cette fonction avec tout élément de $D(\mathbb{R})$ serait nulle donc la fonction serait nulle pp dans $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (résultat classique mais qui sera démontré dans la suite). L'intégrale serait donc nulle pour toute fonction $\varphi$, ce qui est absurde.

## 1.4 En guise de conclusion et d'introduction à la suite...

Ce cours peut être considéré comme une première approche de l'étude des équations aux dérivées partielles, domaine très vaste. Nous y présentons une étude générale des distributions, outil fondamental de l'analyse et des équations aux dérivées partielles en particulier, ainsi que la notion de solution fondamentale et plusieurs exemples classiques. Les outils techniques et d'autres notions fondamentales de l'analyse (espaces fonctionnels, notamment de Sobolev, techniques de calcul,...) permettant une étude plus approfondie ne seront qu'abordés.

J'espère que cette première lecture donnera l'envie au lecteur de se renseigner davantage dans l'abondante littérature sur le sujet.

6 Février 2007

# Chapitre 2

# Eléments de la théorie des distributions

## 2.1 Fonctions test

Nous adoptons l'approche classique qui consiste à définir les distributions comme des fonctionnelles linéaires continues sur l'ensemble des fonctions indéfiniment continûment dérivabless à support compact. Une première étape consiste à rassembler les principales propriétés de ces fonctions. On désigne par $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

### 2.1.1 Supports

**Définition 2.1.1** *Soit $f$ une fonction définie dans un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$. Un ouvert $\omega$ inclus dans $\Omega$ est un ouvert d'annulation pour $f$ si $f(x) = 0$ pour tout $x$ dans $\omega$. L'union de tous les ouverts d'annulation de $f$ est encore un ouvert d'annulation de $f$. Son complémentaire dans $\Omega$ est appelé le support de $f$ et est noté*

$$supp(f) \text{ ou encore } [f].$$

*Soit $f$ une fonction définie presque partout dans un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$. Un ouvert $\omega$ inclus dans $\Omega$ est un ouvert d'annulation presque partout pour $f$ si $f(x) = 0$ pour presque tout $x$ dans $\omega$. L'union de tous les ouverts d'annulation presque partout de $f$ est encore un ouvert d'annulation presque partout de $f$ (voir le cours d'analyse de seconde candidature). Son complémentaire dans $\Omega$ est appelé le support presque partout de $f$ et est noté*

$$supp_{pp}(f) \text{ ou encore } [f]_{pp}.$$

Si $f$ est défini dans $\Omega$, on montre directement que

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$$

où l'adhérence est prise dans $\Omega$; si en outre $f$ est continu on a

$$\text{supp}(f) = \text{supp}_{pp}(f).$$

Soient $f, g$ des fonctions définies (pp) sur $\Omega$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. On établit directement les propriétés suivantes à propos des supports (des supports presque partout)

$$[\alpha f + \beta g] \subset [f] \cup [g] \quad \text{et} \quad [fg] \subset [f] \cap [g].$$

Rappelons encore que l'on désigne par $C_\infty(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment continûment dérivables dans $\Omega$ à valeurs complexes. Le sous-espace formé des éléments dont le support est un compact de $\Omega$ est noté $D(\Omega)$.

Toute fonction $\varphi \in D(\Omega)$ peut être prolongée en une fonction $\tilde{\varphi}$ définie dans $\mathbb{R}^n$ en posant $\tilde{\varphi} = \varphi$ dans $\Omega$ et $\tilde{\varphi} = 0$ dans $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. On a $\tilde{\varphi} \in D(\mathbb{R}^n)$. De fait, $\tilde{\varphi}$ est de classe $C_\infty$ dans $\Omega$ et dans $\mathbb{R}^n \setminus [\varphi]$. Ces deux ouverts recouvrent $\mathbb{R}^n$. De plus, $[\tilde{\varphi}] = [\varphi]$.

On ne fait généralement pas de distinction entre les fonctions $\varphi$ et $\tilde{\varphi}$ bien que leurs domaines de définition soient distincts.

Plus généralement, si $e$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, on définit aussi $D(e)$ comme l'ensemble des fonctions $f \in D(\mathbb{R}^n)$ telles que $[f] \subset e$.

### 2.1.2 Convergence

Introduisons la notion de convergence dans $D(\Omega)$.

**Définition 2.1.2** On dit qu'une suite $\varphi_m$ d'éléments de $D(\Omega)$ *converge dans* $D(\Omega)$ vers un élément $\varphi$ de $D(\Omega)$ s'il existe un compact $K$ de $\Omega$ tel que $[\varphi_m] \subset K$ pour tout $m$, $[\varphi] \subset K$ et

$$\sup_K |D^\alpha \varphi_m - D^\alpha \varphi| \to 0$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ lorsque $m \to \infty$.

On dit qu'une suite $\varphi_m$ d'éléments de $D(\Omega)$ converge dans $D(\Omega)$ s'il existe une fonction $\varphi$ de cet ensemble pour laquelle elle vérifie ce qui précède.

Une suite $\varphi_m \in D(\Omega)$ est dite *de Cauchy dans* $D(\Omega)$ s'il existe un compact $K$ de $\Omega$ tel que $[\varphi_m] \subset K$ pour tout $m$ et

$$\sup_K |D^\alpha \varphi_r - D^\alpha \varphi_s| \to 0$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ lorsque $r, s \to +\infty$.

Une suite $\varphi_m \in D(\Omega)$ est *bornée dans* $D(\Omega)$ s'il existe un compact $K$ de $\Omega$ tel que $[\varphi_m] \subset K$ pour tout $m$ et si pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, il existe une constante $C_\alpha$ telle que

$$\sup_K |D^\alpha \varphi_m| \leq C_\alpha \ \text{ pour tout } m.$$

Une suite $\varphi_m \in D(\Omega)$ converge vers $\varphi$ dans $D(\Omega)$ si et seulement si $\varphi_m - \varphi$ converge vers 0 dans $D(\Omega)$.

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier qu'une combinaison linéaire de suites convergentes dans $D(\Omega)$ converge vers la combinaison linéaire correspondante des limites. De même, le produit de deux suites convergentes converge vers le produit des limites.

**Théorème 2.1.3** *[Critère de Cauchy] Une suite $\varphi_m \in D(\Omega)$ converge dans $D(\Omega)$ si et seulement si elle est de Cauchy dans $D(\Omega)$.*

*Preuve.* La condition est nécessaire car si $\varphi_m$ converge vers $\varphi$ dans $D(\Omega)$, il existe un compact $K$ de $\Omega$ tel que $[\varphi_m] \subset K$ pour tout $m$ et on a

$$\sup_K |D^\alpha \varphi_r - D^\alpha \varphi_s| \leq \sup_K |D^\alpha \varphi_r - D^\alpha \varphi| + \sup_K |D^\alpha \varphi - D^\alpha \varphi_s|.$$

Montrons qu'elle est aussi suffisante. Si la suite $\varphi_m$ est de Cauchy, il existe un compact $K$ de $\Omega$ tel que $[\varphi_m] \subset K$ pour tout $m$. De plus, la suite $\varphi_m$ et toutes ses dérivées satisfont au critère de Cauchy de la convergence uniforme dans tout compact de $\Omega$. Par le théorème de convergence des fonctions continûment dérivables, la suite $\varphi_m$ converge uniformément dans tout compact de $\Omega$ avec toutes ses dérivées vers une fonction $\varphi$ qui est de classe $C_\infty$ dans $\Omega$. La fonction $\varphi$ est nulle dans $\Omega \setminus K$ car il en est ainsi de toutes les fonctions $\varphi_m$.□

**Exemple 2.1.4** Soit $\psi \in D(\mathbb{R}^n)$ une fonction d'intégrale égale à 1 et dont le support est inclus dans la boule unité. Pour tout entier $m$ strictement positif, posons $\psi_m(x) = m^n \psi(mx)$. Toutes les fonctions $\psi_m$ ont une intégrale égale à 1.

*Si $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$, la suite $\varphi * \psi_m$ converge vers $\varphi$ dans $D(\mathbb{R}^n)$.*

De fait, on a

$$[\varphi * \psi_m] \subset [\varphi] + [\psi_m] \subset [\varphi] + b(1/m)$$

donc les supports des fonctions $\varphi * \psi_m$ sont inclus dans un compact fixe. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout multi-indice $\alpha$, on a

$$\begin{aligned} D^\alpha(\varphi * \psi_m - \varphi)(x) &= (D^\alpha \varphi) * \psi_m(x) - D^\alpha \varphi(x) \\ &= \int D^\alpha \varphi(x-y)\psi_m(y)dy - D^\alpha \varphi(x) \\ &= \int (D^\alpha \varphi(x-y) - D^\alpha \varphi(x))\psi_m(y)dy \\ &= \int (D^\alpha \varphi(x-y/m) - D^\alpha \varphi(x))\psi(y)dy. \end{aligned}$$

Cela étant

$$|D^\alpha(\varphi * \psi_m - \varphi)(x)| \leq \int |\psi(y)|dy \sup_{|y| \leq 1/m} |D^\alpha \varphi(x+y) - D^\alpha \varphi(x)|.$$

Ceci démontre le résultat car toutes les dérivées de $\varphi$ sont uniformément continues sur $\mathbb{R}^n$.□

**Proposition 2.1.5** *Si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ et*

$$\int_\Omega f(x)\,\varphi(x)dx = 0$$

*pour tout $\varphi \in D(\Omega)$ alors $f$ est égal à 0 presque partout.*

*Preuve.* On utilise par exemple le produit de composition (pour une rédaction de la démonstration, voir “Cahier d’exercices d’analyse, 2CM, F. Bastin et J.-P. Schneiders”).□

## 2.2 Distributions

Les valeurs ponctuelles d’une fonction irrégulière n’ont guère de sens. La valeur en 0 de la fonction saut $\chi_{]0,+\infty[}$ est arbitraire. Par contre, la proposition 2.1.5 montre qu’une fonction $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ est entièrement caractérisée par ses intégrales avec les éléments de $D(\Omega)$. On peut donc identifier $f$ à la fonctionnelle linéaire

$$D(\Omega) \to \mathbb{C} : \varphi \mapsto \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx.$$

La théorie des distributions adopte ce point de vue.

**Définition 2.2.1** Une *distribution* $u$ dans un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$ est une fonctionnelle linéaire sur $D(\Omega)$ telle que $u(\varphi_m)$ converge vers $u(\varphi)$ pour toute suite $\varphi_m$ de $D(\Omega)$ qui converge vers $\varphi$ dans $D(\Omega)$.

Puisque $u$ est linéaire, on peut se limiter dans cette définition à considérer les suites $\varphi_m$ qui convergent vers 0 dans $D(\Omega)$. On désigne par $D'(\Omega)$ l’ensemble des distributions dans $\Omega$. La condition de continuité des distributions se traduit aussi utilement par des majorations.

**Théorème 2.2.2** *Une fonctionnelle linéaire $u$ sur $D(\Omega)$ est une distribution si et seulement si, pour tout compact $K$ de $\Omega$, il existe des constantes $C$, $k$ telles que*

$$|u(\varphi)| \leq C \sup_{|\alpha|\leq k} \sup_K |D^\alpha \varphi| \quad , \quad \varphi \in D(K).$$

*Preuve.* La condition est suffisante vu la définition de la convergence dans $D(\Omega)$. Montrons qu’elle est nécessaire. Supposons qu’il existe un compact $K$ de $\Omega$ tel que l’inégalité ci-dessus ne soit réalisée pour aucune valeur de $C$ et $k$. En prenant $C = k = m$, on obtient pour tout entier $m$ une fonction $\varphi_m \in D(K)$ telle que

$$|u(\varphi_m)| > m \sup_{|\alpha|\leq m} \sup_K |D^\alpha \varphi_m|.$$

Puisque cette inégalité reste inchangée lorsque $\varphi_m$ est multiplié par une constante non nulle, on peut supposer que $u(\varphi_m) = 1$ pour tout $m$. On a alors

$$\sup_K |D^\alpha \varphi_m| \leq \frac{1}{m} \text{ si } |\alpha| \leq m.$$

En particulier, $\varphi_m$ converge vers 0 dans $D(\Omega)$. Puisque $u$ est une distribution, ceci entraîne la convergence de $u(\varphi_m)$ vers 0 d’où une contradiction. □

Donnons quelques exemples.

a) Si $\mu$ est une mesure dans $\Omega$, alors

$$u(\varphi) = \int \varphi d\mu$$

définit une distribution. On a ici

$$|u(\varphi)| \leq V\mu(K) \sup_K |\varphi| \ , \quad \varphi \in D(K).$$

b) Si $x_0 \in \mathbb{R}^n$, la distribution $\delta_{x_0}$ de Dirac peut être définie par

$$\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0), \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^n).$$

c) Si $f$ est une fonction localement intégrable dans $\Omega$, la fonctionnelle $u_f$ définie par

$$u_f(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\ dx, \quad \varphi \in D(\Omega)$$

est une distribution dans $\Omega$.

d) La fonction $1/x,\ x \in \mathbb{R}_0$ n'est pas localement intégrable dans $\mathbb{R}$. On peut cependant définir une distribution associée, appelée *valeur principale ou partie finie de* $1/x$. Il s'agit de la distribution (notée $pv(1/x)$ ou $pf(1/x)$ dans la suite)

$$pv\left(\frac{1}{x}\right)(\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\ dx, \quad \varphi \in D(\mathbb{R}).$$

On montre directement qu'il s'agit bien d'une distribution dans $\mathbb{R}$ en vérifiant que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\ dx = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x} dx = -\int_{\mathbb{R}} D\varphi(x)\ \ln(|x|)\ dx$$

et en utilisant la majoration de continuité pour le dernier terme (la fonction $\ln(|x|)$ est localement intégrable dans $\mathbb{R}$).

Ajoutons qu'il est possible d'aborder la théorie des distributions d'une autre manière, par exemple en les définissant comme limite d'intégrales

$$u(\varphi) = \lim_{m\to+\infty} \int_\Omega f_m(x)\varphi(x)\ dx$$

où l'on suppose que les fonctions $f_m$ sont localement intégrables. Ceci devrait bien sûr être précisé (une distribution apparaît comme un élément du quotient de l'espace des suites de fonctions $f_m \in L^1_{loc}(\Omega)$ $(m \in \mathbb{N})$ telles que $\int_\Omega f_m(x)\varphi(x)\ dx$ converge pour tout $\varphi \in D(\Omega)$ par le sous-ensemble des suites de fonctions $f_m \in L^1_{loc}(\Omega)$ $(m \in \mathbb{N})$ telles que $\int_\Omega f_m(x)\varphi(x)\ dx$ converge vers 0 pour tout $\varphi \in D(\Omega)$).

## 2.3 Dérivation des distributions

### 2.3.1 Définition

**Définition 2.3.1** *Si $u \in D'(\Omega)$, on pose*

$$(D_{x_j}u)(\varphi) = u(-D_{x_j}\varphi) \ , \quad \varphi \in D(\Omega),$$

*et, si $f \in C_\infty(\Omega)$,*

$$(fu)(\varphi) = u(f\varphi) \ , \quad \varphi \in D(\Omega).$$

On définit ainsi des distributions $D_{x_j}u$ et $fu$ dans $\Omega$. La linéarité est immédiate. De plus, si

$$|u(\varphi)| \leq C \sup_{|\alpha|\leq k} \sup_K |D^\alpha \varphi| \ , \quad \varphi \in D(K),$$

on a

$$|(D_{x_j}u)(\varphi)| \leq C \sup_{|\alpha|\leq k+1} \sup_K |D^\alpha \varphi|$$

et[1]

$$\begin{aligned} |(fu)(\varphi)| &\leq C \sup_{|\alpha|\leq k} \sup_K |D^\alpha (f\varphi)| \\ &\leq C \sup_{|\alpha|\leq k} \sup_K |\sum_{\beta\leq\alpha} C_\alpha^\beta D^{\alpha-\beta} f D^\beta \varphi| \\ &\leq C' \sup_{|\alpha|\leq k} \sup_K |D^\alpha \varphi| \end{aligned}$$

pour tout $\varphi \in D(K)$.

### 2.3.2 Quelques propriétés

a) Comme pour les fonctions de classe $C_2$, on peut permuter l'ordre des dérivations

$$D_{x_k}D_{x_j}u = D_{x_j}D_{x_k}u \ , \quad u \in D'(\Omega).$$

De fait, on a

$$(D_{x_k}D_{x_j}u)(\varphi) = -(D_{x_j}u)(D_{x_k}\varphi) = u(D_{x_j}D_{x_k}\varphi) = u(D_{x_k}D_{x_j}\varphi) = (D_{x_j}D_{x_k}u)(\varphi).$$

Ceci permet d'utiliser la notation $D^\alpha u$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, pour désigner les dérivées partielles d'une distribution

$$(D^\alpha u)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} u(D^\alpha \varphi).$$

b) La règle de dérivation d'un produit reste valable

$$D_{x_k}(fu) = (D_{x_k}f)u + fD_{x_k}u \ , \quad f \in C_\infty(\Omega), \ u \in D'(\Omega).$$

[1]Formule de Leibniz: si $f, g \in C^p(\Omega)$, et $|\alpha| \leq p$, on a $D^\alpha(fg) = \sum_{\beta\leq\alpha} C_\alpha^\beta D^\beta f D^{\alpha-\beta} g$ où $C_\alpha^\beta = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} = \frac{\alpha_1!\ldots\alpha_n!}{\beta_1!\ldots\beta_n! \ (\alpha_1-\beta_1)!\ldots(\alpha_n-\beta_n)!}$.

On a en effet

$$-u(fD_{x_k}\varphi) = u((D_{x_k}f)\varphi) - u(D_{x_k}(f\varphi)) \quad , \quad \varphi \in D(\Omega).$$

c) Si $g \in C_k(\Omega)$ et $|\alpha| \leq k$, on a

$$D^\alpha u_g = u_{D^\alpha g}.$$

En effet, en intégrant par parties lorsque $\Omega = ]a_1, b_1[\times \ldots \times ]a_n, b_n[$, on obtient

$$\int g(x)(-D)^\alpha \varphi(x)dx = \int D^\alpha g(x)\varphi(x)dx$$

pour tout $\varphi \in D(\Omega)$. On montre alors que si $u, v$ sont deux distributions dans $\Omega$ qui sont égales en tout $\varphi \in D(I)$, où $I$ est un intervalle ouvert à support compact dans $\Omega$ alors ces distributions sont égales.

Si $g \in L^1_{loc}(\Omega)$, on a directement $fu_g = u_{fg}$.

Plus généralement, si

$$L(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

est un opérateur de dérivation à coefficients de classe $C_\infty$ dans $\Omega$, on peut définir

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha u \in D'(\Omega).$$

On a

$$(Lu)(\varphi) = u(^tL\varphi) \quad , \quad \varphi \in D(\Omega),$$

avec

$$^tL\varphi = \sum_{|\alpha| \leq m} (-D)^\alpha (a_\alpha \varphi).$$

### 2.3.3 Exemples

**Exemple 2.3.2** *Par définition,*

$$(D^k\delta_0)(\varphi) = (-1)^k D^k\varphi(0).$$

*On a*

$$x^j D^k \delta_0 = \begin{cases} 0 & si \quad j > k \geq 0, \\ (-1)^j \dfrac{k!}{(k-j)!} D^{k-j}\delta_0 & si \quad 0 \leq j \leq k. \end{cases} \tag{2.1}$$

La relation (2.1) s'obtient aisément en utilisant la formule de Leibniz: on a en effet

$$\begin{aligned} (x^j D^k \delta_0)(\varphi) &= (-1)^k D^k [x^j \varphi(x)]_{x=0} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j > k \geq 0, \\ (-1)^k C_k^j j! D^{k-j}\varphi(0) & \text{si} \quad 0 \leq j \leq k. \end{cases} \end{aligned}$$

**Exemple 2.3.3** *La fonction $H$ définie par $H(x) = 1$ si $x > 0$ et $H(x) = 0$ si $x \leq 0$, porte le nom de fonction de Heaviside. Sa valeur en $0$ importe peu. Considérons la distribution $Y$ sur $\mathbb{R}$ définie par*

$$Y(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\,\varphi(x)dx = \int_{0}^{+\infty} \varphi(x)dx.$$

*On a*

$$DY = \delta_0.$$

De fait,

$$DY(\varphi) = Y(-D\varphi) = -\int_0^{+\infty} D\varphi(x)dx = \varphi(0) = \delta_0(\varphi)$$

pour tout $\varphi \in D(\mathbb{R})$.

Plus généralement, on a le résultat suivant.

**Proposition 2.3.4** *Soient $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f$ une fonction de classe $C_1$ dans $I \setminus \{x_0\}$. Si $Df$ est intégrable au voisinage de $x_0$ alors les limites*

$$f(x_0\pm) = \lim_{x \to x_0\pm} f(x)$$

*existent, sont finies et*

$$Du_f = u_{Df} + (f(x_0+) - f(x_0-))\,\delta_{x_0}.$$

Cet énoncé s'applique à la fonction d'Heaviside mais aussi à la fonction $\sqrt{|x|}$ pour laquelle on a donc

$$Du_{|x|^{1/2}} = \frac{\operatorname{sgn} x}{2}\, u_{|x|^{-1/2}}$$

dans $\mathbb{R}$.

*Preuve.* Si $x_0 < y$ et $[x_0, y] \subset I$ alors

$$f(x) = f(y) - \int_x^y Df(s)\,ds, \quad x_0 < x < y.$$

Puisque $Df$ est intégrable dans $[x_0, y]$, la limite $f(x_0+)$ existe. De la même façon $f(x_0-)$ existe aussi. Cela étant, $f$ est localement intégrable dans $]a, b[$ et on a

$$\begin{aligned} Du_f(\varphi) &= -\int_I f(x)D\varphi(x)\,dx = -\lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x-x_0|>\epsilon} f(x)D\varphi(x)\,dx \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \Big[ \int_{|x-x_0|>\epsilon} Df(x)\varphi(x)\,dx + (f\varphi)(x_0+\epsilon) - (f\varphi)(x_0-\epsilon) \Big] \\ &= u_{Df}(\varphi) + (f(x_0+) - f(x_0-))\,\delta_{x_0}(\varphi). \end{aligned}$$

**Exemple 2.3.5** *On a*

$$D_x \ln(|x|) = pv\left(\frac{1}{x}\right).$$

Quelques exercices.

- Montrer que l'application définie par
$$\varphi \in D(\mathbb{R}^2) \ \mapsto \ u(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,x)\, dx$$
est une distribution dans $D(\mathbb{R}^2)$ qui vérifie $(D_x + D_y)u = 0$.
- Pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe une distribution dans $\mathbb{R}$ qui coïncide avec la fonction $1/x^m$ dans $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

### 2.3.4 Propriétés-suite

**Proposition 2.3.6** *Soit $I = ]a,b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Si $u \in D'(I)$ est tel que $Du = 0$ alors $u$ est la distribution associée à une fonction constante.*

*Preuve.* Soit $\varphi_0 \in D(I)$ d'intégrale égale à 1. Pour tout $\varphi \in D(I)$, la fonction
$$\Phi(x) = \int_a^x \varphi(s)\, ds - \int_a^b \varphi(s)\, ds \int_a^x \varphi_0(s)\, ds$$
appartient à $D(I)$. On a donc
$$0 = u(D\Phi) = u\left(\varphi - \varphi_0 \int_a^b \varphi(s)\, ds\right) = u(\varphi) - u(\varphi_0) \int_a^b \varphi(s)\, ds.$$
Ceci démontre le théorème. $\square$

**Proposition 2.3.7** *Si $I = ]a,b[$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $u \in D'(I)$, il existe $v \in D'(I)$ tel que $Dv = u$. Si $f \in L^1_{loc}(I)$, $x_0 \in I$ et*
$$g(x) = \int_{x_0}^x f(s)\, ds \quad , \quad x \in I,$$
*on a $Du_g = u_f$.*

*Preuve.* Si la fonction $\varphi_0$ est choisie comme dans la proposition précédente, la distribution
$$v(\varphi) = -u_{(x)}(\int_a^x \varphi(s)\, ds - \int_a^b \varphi(s)\, ds \int_a^x \varphi_0(s)\, ds)$$
vérifie $Dv = u$.

Supposons que $f \in L^1_{loc}(I)$. Si la fonction $g$ est définie comme ci-dessus, on a
$$\begin{aligned}
-\int_a^b g(x) D\varphi(x)\, dx &= -\int_a^b D\varphi(x)\, dx \int_{x_0}^x f(s)\, ds \\
&= \int_a^{x_0} D\varphi(x)\, dx \int_x^{x_0} f(s)\, ds - \int_{x_0}^b D\varphi(x)\, dx \int_{x_0}^x f(s)\, ds \\
&= \int_a^{x_0} f(s)\, ds \int_a^s D\varphi(x)\, dx - \int_{x_0}^b f(s)\, ds \int_s^b D\varphi(x)\, dx \\
&= \int_a^b f(s)\varphi(s)\, ds
\end{aligned}$$

en vertu du théorème de Fubini. □

On peut aussi vérifier directement que la distribution $v$ construite à partir de $u_f$ est à une constante près la distribution $u_g$.

Signalons aussi les résultats suivants dans $\mathbb{R}^n$. Leurs démonstrations nécessitent des résultats prouvés plus loin.

**Proposition 2.3.8** *Soient $\omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$ et $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Si $u \in D'(\omega \times I)$ et $D_{x_n}u = 0$ alors il existe $u_0 \in D'(\omega)$ tel que*

$$u(\varphi) = \int_I u_0(\varphi(.,x_n))\,dx_n$$

*pour tout $\varphi \in D(\omega \times I)$.*

*Si $\Omega$ est un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$, $u \in D'(\Omega)$ et $D_{x_j}u = 0$ pour $j = 1,\ldots,n$ alors $u$ est la distribution associée à une fonction constante.*

**Corollaire 2.3.9** *Si $f, g_1, \ldots, g_n$ sont des fonctions continues dans un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$ et $D_{x_j}u_f = u_{g_j}$ pour tout $j$ alors $f \in C_1(\Omega)$ et $D_{x_j}f = g_j$.*

## 2.4 Support d'une distribution

### 2.4.1 Définition

**Définition 2.4.1** *Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $u$ une distribution dans $\Omega$. Un ouvert $\omega$ inclus dans $\Omega$ est un ouvert d'annulation de $u$ si $u(\varphi) = 0$ pour tout $\varphi \in D(\omega)$.*

**Lemme 2.4.2** *Toute union d'ouverts d'annulation d'une distribution est un ouvert d'annulation.*

*Preuve.* Soient $\omega$ un ouvert de $\Omega$ qui est une union d'ouverts d'annulation de $u$ et $\varphi$ un élément de $D(\omega)$. Puisque le support de $\varphi$ est compact et inclus dans $\omega$, il existe un nombre fini d'ouverts $\omega_1, \ldots, \omega_N$ qui sont des ouverts d'annulation de $u$ et tels que

$$[\varphi] \subset \bigcup_{j=1}^{N} \omega_j.$$

Posons

$$\omega_{j,m} = \left\{ x \in \omega_j : |x| < m, d(x, \mathbb{R}^n \setminus \omega_j) > \frac{1}{m} \right\}.$$

Pour tout $j \in \{1, \ldots, N\}$, ces ouverts sont emboîtés en croissant et leur union est $\omega_j$. Comme $[\varphi]$ est compact et inclus dans $\cup_{m=1}^{+\infty} \cup_{j=1}^{N} \omega_{j,m}$ il existe alors un naturel $m_0$ tel que

$$[\varphi] \subset \cup_{j=1}^{N} \omega_{j,m_0}.$$

Cela étant, pour tout $j \in \{1, \ldots, N\}$, l'adhérence de $\omega_{j,m_0}$ est un compact de $\omega_j$; il existe donc une fonction $\alpha_j \in D(\omega_j)$ égale à 1 dans $\omega_{j,m_0}$ et telle que $0 \leq \alpha_j \leq 1$. La fonction

$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j$ est de classe $C_\infty$ dans $\mathbb{R}^n$ et est strictement positive dans $\cup_{j=1}^{N}\omega_{j,m_0}$. Il s'ensuit que, pour tout $j_0 \in \{1,\ldots,N\}$, la fonction

$$\varphi_{j_0} = \begin{cases} \frac{\alpha_{j_0}\varphi}{\sum_{k=1}^{N}\alpha_k} & \text{si } x \in \cup_{j=1}^{N}\omega_{j,m_0} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

appartient à $D(\omega_{j_0})$ et $\varphi = \sum_{j=1}^{N} \varphi_j$ dans $\mathbb{R}^n$. Puisque les ouverts $\omega_j$ sont des ouverts d'annulation, on a

$$u(\varphi) = \sum_{j=1}^{N} u(\varphi_j) = 0.$$

L'ouvert $\omega$ est donc un ouvert d'annulation. $\square$

Le lemme 2.4.2 montre que toute distribution $u$ possède un plus grand ouvert d'annulation. C'est l'union de tous les ouverts d'annulation de $u$.

**Définition 2.4.3** Si $u \in D'(\Omega)$, le *support* de $u$, noté $[u]$ est le complémentaire dans $\Omega$ du plus grand ouvert d'annulation de $u$.

Par définition, $[u]$ est un fermé de $\Omega$ et on a $u(\varphi) = 0$ si $\varphi \in D(\Omega)$ et $[u] \cap [\varphi] = \emptyset$.
Donnons quelques exemples.

a) Si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, on a

$$[u_f] = [f]_{pp}.$$

De fait, un ouvert d'annulation de $u_f$ est un ouvert $\omega$ tel que

$$\int f\varphi\, dx = 0 \quad \text{pour tout} \quad \varphi \in D(\omega).$$

Cette condition caractérise aussi les ouverts d'annulation pp de $f$.

b) Pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, on a

$$[\delta_a] = \{a\}.$$

c) Si $\mu$ est une mesure dans $\Omega$, alors

$$[\int .d\mu] = [\mu].$$

En effet, la mesure $\mu$ est nulle dans un ouvert $\omega$ de $\Omega$ si et seulement si

$$\int \varphi\, d\mu = 0 \text{ pour tout } \varphi \in D(\omega).$$

d) Si $u \in D'(\Omega)$ et $L$ est un opérateur de dérivation à coefficients de classe $C_\infty$ dans $\Omega$, on a

$$[Lu] \subset [u].$$

De fait, tout ouvert d'annulation de $u$ est un ouvert d'annulation de $Lu$ car $[{}^tL\varphi] \subset [\varphi]$ pour toute fonction $\varphi \in D(\Omega)$.

e) Si $u_1, \ldots, u_p \in D'(\Omega)$ et $c_1, \ldots, c_p \in \mathbb{C}$, on a

$$[\sum_{j=1}^{p} c_j u_j] \subset \bigcup_{j=1}^{p} [u_j].$$

Tout ouvert d'annulation simultanée de $u_1, \ldots, u_p$ est en effet un ouvert d'annulation de la combinaison linéaire.

f) Si $f \in C_\infty(\Omega)$ et si $u \in D'(\Omega)$ alors

$$[fu] \subset [u] \cap [f].$$

g) Si $\varphi, \psi$ sont des éléments de $D(\Omega)$ égales dans un voisinage ouvert $V$ de $[u]$ alors

$$u(\varphi) = u(\psi).$$

En effet, $\varphi - \psi \in D(\Omega)$ est telle que $[\varphi - \psi] \cap [u] \subset (\Omega \setminus V) \cap [u] = \emptyset$ donc $u(\varphi - \psi) = 0$.

h) Si $u$ est une distribution dans $\mathbb{R}^n$ et si $a \in \mathbb{R}^n$ alors la fonctionnelle

$$v : D(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C} \quad \varphi \mapsto u(\varphi(x + a))$$

est une distribution dans $\mathbb{R}^n$ telle que

$$[v] = a + [u].$$

### 2.4.2 Extension par supports

Des considérations de supports permettent d'étendre la définition d'une distribution à des fonctions qui ne sont pas à support compact.

Soit $u \in D'(\Omega)$ et $f \in C_\infty(\Omega)$ tels que $K = [u] \cap [f]$ soit compact. Il existe alors une fonction $\psi \in D(\Omega)$ égale à 1 au voisinage de $K$. L'expression $u(\psi f)$ est indépendante du choix de $\psi$. En effet, si $\psi' \in D(\Omega)$ est aussi égale à 1 au voisinage de $K$, on a

$$[(\psi - \psi')f] \cap [u] \subset [\psi - \psi'] \cap [f] \cap [u] \subset (\Omega \setminus K) \cap K = \emptyset.$$

De là,

$$0 = u((\psi - \psi')f) = u(\psi f) - u(\psi' f)$$

par définition du support de $u$.

Par extension, on écrit encore $u(f)$ pour désigner la valeur commune des $u(\psi f)$.

Notons que si $u$ est une distribution à support compact, $u(f)$ est défini pour tout $f \in C_\infty(\Omega)$.

Notons également que si $[u] \cap [f] = \emptyset$, $u$ distribution dans $\Omega$ et $f$ de classe $C_\infty$ dans $\Omega$, alors $u(f) = 0$.

### 2.4.3 Théorème d'annulation

On a vu ce que l'on entendait par la notion de support d'une distribution; d'une manière que nous avons tout à fait précisée, il s'agit en fait "d'un ensemble en dehors duquel la distribution est nulle". Dans la définition adoptée, tous les termes sont importants; de plus, les estimations (topologiques) de $u(\varphi)$ à partir de bornes supérieures de $\varphi$ et de ses dérivées ne peuvent pas être "améliorées" en utilisant justement le support, c'est-à-dire "là où la distribution n'est pas nulle".

Nous allons compléter et préciser ceci notamment dans ce qui suit.

Soit $u$ une distribution dans un ouvert $\Omega$. Pour tout compact $K$ de $\Omega$ et tout voisinage ouvert $V$ du support de $u$, il existe des constantes $C$, $k$ telles que

$$|u(\varphi)| \leq C \sup_{|\alpha|\leq k} \sup_{K\cap V} |D^\alpha \varphi| \quad , \quad \varphi \in D(K).$$

De fait, soit $\psi \in D(V)$ égal à 1 au voisinage de $K \cap [u]$. Par le théorème 2.2.2, il existe des constantes $C$, $k$ telles que

$$|u(\varphi)| = |u(\psi\varphi)| \leq C \sup_{|\alpha|\leq k} \sup_{[\psi]} |D^\alpha(\psi\varphi)|$$

pour tout $\varphi \in D(K)$. En utilisant la formule de Leibniz, on obtient la majoration annoncée.

Dans cette majoration, $V$ est un voisinage arbitraire du support de $u$. En général, on ne peut pas prendre $V = [u]$ comme le montre l'exemple suivant.

**Exemple 2.4.4** Considérons la distribution $u \in D'(\mathbb{R})$ définie par

$$u(\varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} \Big( \varphi(\frac{1}{m}) - \varphi(0) - \frac{D\varphi(0)}{m} \Big), \quad \varphi \in D(\mathbb{R}).$$

Par la formule de Taylor[2] , on a

$$\varphi(\frac{1}{m}) - \varphi(0) - \frac{D\varphi(0)}{m} = \frac{1}{m^2} \int_0^1 (1-t) D^2\varphi(\frac{t}{m})\, dt$$

donc

$$\Big| \varphi(\frac{1}{m}) - \varphi(0) - \frac{D\varphi(0)}{m} \Big| \leq \frac{1}{2m^2} \sup_{\mathbb{R}} |D^2\varphi|.$$

Cette inégalité assure la convergence de la série et la majoration

$$|u(\varphi)| \leq C \sup_{\mathbb{R}} |D^2\varphi| \quad , \quad \varphi \in D(\mathbb{R}).$$

[2] $\forall x, y \in \Omega$ tels que le segment d'extrémités $x, y$ soit inclus dans $\Omega$, $\forall f$ de classe $C_p$ dans $\Omega$, on a

$$f(y) - f(x) = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(y-x)^k}{k!} (D^k f)(x) \; + \; \frac{(y-x)^p}{(p-1)!} \int_0^1 (1-t)^{p-1} (D^p f)(x + t(y-x))\, dt$$

Le support de $u$ est compact et est donné par

$$[u] = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{m} : m \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Pour tout entier strictement positif $m$, soit[3] $\varphi_m \in D(\mathbb{R})$ égal à $1/\sqrt{m}$ au voisinage de $[1/m, 1]$, égal à 0 au voisinage de $[0, 1/(m+1)]$ et tel que $0 \leq \varphi_m \leq 1/\sqrt{m}$. Par construction, les fonctions $\varphi_m$ sont uniformément majorées par $1/\sqrt{m}$ et toutes leurs dérivées sont nulles sur le support de $u$. Elles convergent donc uniformément avec toutes leurs dérivées vers 0 sur le support de $u$. Cependant, on a

$$u(\varphi_m) = \frac{m}{\sqrt{m}} = \sqrt{m} \to +\infty.$$

Toute majoration de la forme

$$|u(\varphi)| \leq C \sup_{|\alpha| \leq k} \sup_{[u]} |D^\alpha \varphi| \quad , \quad \varphi \in D(\mathbb{R}),$$

est donc exclue.

On a cependant le résultat suivant.

**Théorème 2.4.5** *Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $u \in D'(\Omega)$. Si $\varphi \in D(\Omega)$ et $D^\alpha \varphi$ est égal à 0 sur le support de $u$ pour tout $\alpha$ alors $u(\varphi) = 0$.*

Démontrons un résultat un peu plus précis.

**Lemme 2.4.6** *Soient $u \in D'(\Omega)$, $K$ un compact de $\Omega$ et $k$ un entier positif. S'il existe une constante $C$ telle que*

$$|u(\varphi)| \leq C \sup_{|\alpha| \leq k} \sup_{K} |D^\alpha \varphi| \quad , \quad \varphi \in D(K),$$

*alors toute fonction $\varphi \in D(K)$ nulle sur $[u]$ avec toutes ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à $k$ vérifie $u(\varphi) = 0$.*

*Preuve.* Pour tout $\epsilon > 0$, posons $M_\epsilon = \{y \in \mathbb{R}^n : d(y, [u] \cap [\varphi]) \leq \epsilon\}$. Si $\epsilon$ est assez petit, $M_\epsilon$ est un compact de $\Omega$. Il existe des fonctions $\chi_\epsilon \in D(\mathbb{R}^n)$ égales à 1 au voisinage de $[u] \cap [\varphi]$ et telles que $[\chi_\epsilon] \subset M_\epsilon$. On peut choisir les fonctions $\chi_\epsilon$ de telle manière qu'il existe une constante $C_0$ vérifiant

$$|D^\alpha \chi_\epsilon| \leq C_0 \epsilon^{-|\alpha|} \ \text{ si } \ |\alpha| \leq k.$$

Si $|\alpha| \leq k$ et $y \in M_\epsilon$, il existe $x \in [u] \cap [\varphi]$ tel que $|x - y| \leq \epsilon$. Par hypothèse, on a

$$D^{\alpha+\beta} \varphi(x) = 0 \ \text{ si } \ |\beta| \leq k - |\alpha|.$$

[3]on peut aussi prendre d'autres exemples, cf cours

La formule de Taylor[4] appliquée à $D^\alpha\varphi$ en $x$ à l'ordre $k-|\alpha|>0$ s'écrit donc

$$D^\alpha\varphi(y) = (k-|\alpha|)\sum_{|\beta|=k-|\alpha|}\frac{(y-x)^\beta}{\beta!}\int_0^1 (1-t)^{k-|\alpha|-1}D^{\alpha+\beta}\varphi((1-t)x+ty)dt.$$

Cela étant,

$$|D^\alpha\varphi(y)| \leq (k-|\alpha|)\sum_{|\beta|=k-|\alpha|}\frac{\epsilon^{|\beta|}}{\beta!}\sup_{|\nu|=k}\sup_{M_\epsilon}|D^\nu\varphi|.$$

Il existe donc une constante $C_1$ telle que

$$\sup_{M_\epsilon}|D^\alpha\varphi| \leq C_1\epsilon^{k-|\alpha|}\sup_{|\nu|=k}\sup_{M_\epsilon}|D^\nu\varphi| \text{ si } |\alpha|\leq k.$$

On a $[(1-\chi_\epsilon)\varphi|\cap[u] \subset [1-\chi_\epsilon]\cap[\varphi]\cap[u] = \emptyset$ par construction. On a donc $u(\varphi)=u(\chi_\epsilon\varphi)$. En utilisant l'hypothèse et les majorations des dérivées de $\chi_\epsilon$ et $\varphi$, on obtient

$$\begin{aligned}
|u(\varphi)| = |u(\varphi\chi_\epsilon)| &\leq C\sup_{|\alpha|\leq k}\sup_K|D^\alpha(\chi_\epsilon\varphi)| \\
&\leq C\sup_{|\alpha|\leq k}\sup_K|\sum_{\beta\leq\alpha}C_\alpha^\beta D^{\alpha-\beta}\chi_\epsilon D^\beta\varphi| \\
&\leq \sup_{|\alpha|\leq k}\sum_{\beta\leq\alpha}C_\alpha^\beta C_0\epsilon^{|\beta|-|\alpha|}C_1\epsilon^{k-|\beta|}\sup_{|\nu|=k}\sup_{M_\epsilon}|D^\nu\varphi| \\
&\leq C'\sup_{|\nu|=k}\sup_{M_\epsilon}|D^\nu\varphi|.
\end{aligned}$$

Cette majorante converge vers 0 car toutes les dérivées de $\varphi$ sont uniformément continues dans $\mathbb{R}^n$ et les dérivées d'ordre $k$ sont nulles sur le support de $u$. Ceci achève la démonstration. □

### 2.4.4 Distributions à support ponctuel

Le lemme 2.4.6 permet de donner la structure des distributions à support ponctuel.

La réciproque du résultat suivant est bien sûr vraie.

[4]Si le segment d'extrémités $x,y$ est inclus dans $\Omega$ et si $f$ est de classe $C_p$ dans $\Omega$, on a, avec $h=y-x$,

$$\begin{aligned}
f(y)-f(x) &= \sum_{k_1=1}^n h_{k_1}D_{k_1}f(x)+\ldots+\frac{1}{(p-1)!}\sum_{k_1=1}^n\cdots\sum_{k_{p-1}=1}^n h_{k_1}\ldots h_{k_{p-1}}D_{k_1}\ldots D_{k_{p-1}}f(x) \\
&\quad+\sum_{k_1=1}^n\cdots\sum_{k_p=1}^n h_{k_1}\ldots h_{k_p}\int_0^1\frac{(1-t)^{p-1}}{(p-1)!}(D_{k_1}\ldots D_{k_p}f)_{x+th}dt
\end{aligned}$$

ou encore

$$f(y)-f(x)=\sum_{j=1}^{p-1}\sum_{|\alpha|=j}\frac{h^\alpha}{\alpha!}D^\alpha f(x)+p\sum_{|\alpha|=p}\frac{h^\alpha}{\alpha!}\int_0^1(1-t)^{p-1}(D^\alpha f)(x+th)dt$$

**Proposition 2.4.7** *Si $u$ est une distribution dans un ouvert $\Omega$ dont le support est réduit à un point $x_0 \in \Omega$, $[u] = \{x_0\}$, alors il existe un entier $k$ et des constantes $c_\alpha$ telles que*

$$u(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha D^\alpha \varphi(x_0) \quad , \quad \varphi \in D(\Omega).$$

*Les constantes $c_\alpha$ sont uniques.*

*Preuve.* Soit $b$ une boule fermée centrée en $x_0$ incluse dans $\Omega$. Puisque $u$ est une distribution, il existe des constantes $C$, $k$ telles que

$$|u(\varphi)| \leq C \sup_{|\alpha| \leq k} \sup_b |D^\alpha \varphi| \quad , \quad \varphi \in D(b).$$

Soit $\psi \in D(b)$ égal à 1 au voisinage de $x_0$. Pour tout $\varphi \in D(\Omega)$, la fonction

$$x \to \psi(x) \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{(x - x_0)^\alpha}{\alpha!} D^\alpha \varphi(x_0)$$

appartient à $D(b)$ et est égale à $\psi\varphi$ avec toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre $k$ sur le support de $u$. Par le lemme 2.4.6, on a donc

$$\begin{aligned} u(\psi\varphi) &= u_{(x)}(\psi(x) \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{(x - x_0)^\alpha}{\alpha!} D^\alpha \varphi(x_0)) \\ &= \sum_{|\alpha| \leq k} u_{(x)}(\psi(x) \frac{(x - x_0)^\alpha}{\alpha!}) D^\alpha \varphi(x_0). \end{aligned}$$

De plus, comme $\varphi$ et $\psi\varphi$ sont égales au voisinage du support de $[u]$, on a $u(\varphi) = u(\psi\varphi)$.

Les constantes $c_\alpha$ sont uniques. De fait, supposons que

$$u(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha D^\alpha \varphi(x_0) \quad , \quad \varphi \in D(\Omega).$$

En prenant

$$\varphi(x) = \psi(x) \frac{(x - x_0)^\beta}{\beta!} \quad , \quad |\beta| \leq k,$$

on trouve

$$u_{(x)}(\psi(x) \frac{(x - x_0)^\beta}{\beta!}) = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha \delta_{\alpha,\beta} = c_\beta.$$

Les constantes $c_\alpha$ sont donc univoquement définies par $u$. $\square$

**Exemple 2.4.8** *a) Résoudre l'équation $Du = a\delta_0$ où $a$ est un complexe non nul.*

*b) Résoudre l'équation $xDu = 1$.*

Remarquons que si $v$ est solution de l'équation alors $u$ est solution si et seulement si $v-u$ est solution de l'équation homogène.

a) Vu ce qui précède, on a déjà la solution particulière $au_Y$. Les solutions de l'équation homogène $Du=0$ sont les distributions associées aux fonctions constantes. Dès lors, les solutions de l'équation sont les distributions associées aux fonctions $aY+c$ où $c \in \mathbb{C}$.

b) On vérifie que $u_{\ln}$ est une solution particulière. Déterminons les solutions de l'équation homogène associée $xDu = 0$. Si $u$ est une solution, le support de $Du$ est vide ou réduit au singleton[5] $\{0\}$. Il existe donc des constantes $c_0, \ldots, c_k$ telles que

$$Du = \sum_{j=0}^{k} c_j D^j \delta_0.$$

Il vient

$$xDu = -\sum_{j=1}^{k} j c_j D^{j-1} \delta_0 = 0.$$

Ainsi $c_j = 0$ si $j > 0$ et $Du = a\delta_0$. La solution générale de cette dernière équation est $aY + b$.

La solution générale de $xDu = 1$ est donc $u = \ln|x| + aY + b$.

## 2.5 Distributions de fonctions paramétriques

La continuité imposée dans la définition 2.2.1 assure de bonnes propriétés lorsqu'une distribution agit sur des fonctions qui dépendent de paramètres. Quelques résultats techniques sont nécessaires pour les applications.

### 2.5.1 Dérivation

**Théorème 2.5.1** *Soient $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$. On suppose que*

- *$u$ est une distribution dans $\Omega$,*
- *$\varphi$ est de classe $C_\infty$ dans $\Omega \times U$,*
- *$([u] \times K) \cap [\varphi]$ est un compact de $\Omega \times U$ pour tout compact $K$ de $U$.*

*Alors, la fonction $y \to u(\varphi(., y))$ est de classe $C_\infty$ dans $U$ et*

$$D_y^\alpha u(\varphi(., y)) = u(D_y^\alpha \varphi(., y))$$

*pour tout multi-indice $\alpha$.*

[5] En effet, supposons que $v$ soit une distribution dans $\mathbb{R}$ telle que $xv = 0$ et $[v] \neq \emptyset$. Soit $x_0 \in [v]$, $x_0 \neq 0$. Il existe alors un voisinage ouvert $V$ de $x_0$ qui ne contient pas 0. Dès lors, pour tout $\varphi \in D(V)$, la fonction $\psi(x) = \varphi(x)/x$, $x \in \mathbb{R}$ appartient à $D(\mathbb{R})$ et est telle que $(xv)(\psi) = v(\varphi) = 0$. Il s'ensuit que $V \subset \mathbb{R} \setminus [v]$, ce qui est absurde car $x_0 \in V \cap [v]$.

Remarquons que l'hypothèse sur les supports est toujours vérifiée si $\varphi$ ou $[u]$ est à support compact.

*Preuve.* Pour tout $y \in U$, on a $[\varphi(.,y)] \subset \{x \in \Omega : (x,y) \in [\varphi]\}$ donc

$$([u] \cap [\varphi(.,y)]) \subset \mathrm{pr}_\Omega([u] \times \{y\} \cap [\varphi])$$

où $\mathrm{pr}_\Omega$ désigne la projection sur $\Omega$. Ce dernier ensemble est compact. Ainsi, la condition de support imposée à $u$ et $\varphi$ assure que $u(\varphi(.,y))$ est défini pour tout $y \in U$. Montrons que cette fonction est continue dans $U$. Soit $y_0 \in U$ et $K$ une boule fermée de centre $y_0$ incluse dans $U$. Si $y \in K$, on a

$$([u] \cap [\varphi(.,y)]) \times \{y\} \subset ([u] \times K) \cap [\varphi].$$

Ce dernier ensemble est compact, donc il existe un compact $K_1$ de $\Omega$ tel que

$$[u] \cap [\varphi(.,y)] \subset K_1 \quad , \quad y \in K.$$

Soit $\psi \in D(\Omega)$ égal à 1 au voisinage de $K_1$. Par définition,

$$u(\varphi(.,y)) = u(\psi\varphi(.,y)) \quad , \quad y \in K.$$

Si $y_0 + h \in K$, on a

$$\begin{aligned}
|u(\varphi(.,y_0+h)) - u(\varphi(.,y_0))| &= |u(\psi(\varphi(.,y_0+h) - \varphi(.,y_0)))| \\
&\leq C \sup_{|\alpha| \leq k_0} \sup_{x \in [\psi]} |D_x^\alpha(\psi(x)(\varphi(x,y_0+h) - \varphi(x,y_0)))| \\
&\leq C' \sup_{|\alpha| \leq k_0} \sup_{x \in [\psi]} |D_x^\alpha \varphi(x,y_0+h) - D_x^\alpha \varphi(x,y_0)|.
\end{aligned}$$

Cette expression tend vers 0 si $h$ tend vers 0 car les dérivées de $\varphi$ sont uniformément continues dans tout compact de $\Omega \times U$.

Montrons que $y \to u(\varphi(.,y))$ est dérivable en $y_0$. Si $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $y_0 + he_k \in K$, on a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\,(u(\varphi(.,y_0+he_k) - u(\varphi(.,y_0))) - u(D_{y_k}\varphi(.,y_0)) \\
&= \frac{1}{h}\, u\left(\psi(.)(\varphi(.,y_0+he_k) - \varphi(.,y_0) - hD_{y_k}\varphi(.,y_0))\right).
\end{aligned}$$

Par la formule de Taylor,

$$\varphi(x,y_0+he_k) - \varphi(x,y_0) - hD_{y_k}\varphi(x,y_0) = h^2 \int_0^1 (1-t) D_{y_k}^2 \varphi(x,y_0+the_k)dt.$$

On obtient donc la majorante

$$C|h| \sup_{|\alpha| \leq k_0} \sup_{x \in [\psi]} \left| D_x^\alpha \left( \psi(x) \int_0^1 (1-t)(D_{y_k}^2 \varphi)(x,y_0+the_k)\,dt \right) \right|.$$

En effectuant les dérivées par la formule de Leibniz, on trouve une majoration de la forme

$$C'|h| \sup_{|\alpha|\leq k_0} \sup_{[\psi]\times K} |D_x^\alpha D_{y_k}^2 \varphi|.$$

Cette expression converge vers 0 si $h$ tend vers 0, donc

$$D_{y_k} u(\varphi(.,y)) = u(D_{y_k}\varphi(.,y)).$$

Par ce qui précède, ces dérivées sont continues dans $U$. On obtient le théorème en itérant le résultat. □

### 2.5.2 Intégration

Montrons qu'il est également possible de permuter l'application d'une distribution et d'une intégrale.

**Théorème 2.5.2** *On conserve les hypothèses du théorème 2.5.1. Pour tout compact $K$ de $U$, on a*

$$\int_K u(\varphi(.,y))\,dy = u(\int_K \varphi(.,y)\,dy).$$

*Preuve.* Vu ce qui précède, le premier membre a un sens. Si $K$ est un compact de $U$, on a

$$\Big[\int_K \varphi(.,y)\,dy\Big] \subset \{x \in \Omega : \exists\, y \in K \text{ t.q. } (x,y) \in [\varphi]\},$$

donc

$$[u] \cap [\int_K \varphi(.,y)dy] \subset K_1$$

où $K_1$ est la première projection de $([u] \times K) \cap [\varphi]$. Cet ensemble est compact, donc le second membre de l'égalité proposée est défini.

Choisissons maintenant une fonction $\psi \in D(\Omega)$ égale à 1 au voisinage de $K_1$. Par définition, il suffit de démontrer que

$$\int_K u(\psi\varphi(.,y))\,dy = u(\psi \int_K \varphi(.,y)\,dy).$$

Pour tout entier positif $m$, soit $e_k^{(m)}$, $0 \leq k \leq M_m$, une partition finie de $K$ en ensembles mesurables tels que $diam(e_k^{(m)}) \leq \epsilon_m$ où la suite $\epsilon_m$ converge vers 0 si $m$ tend vers l'infini. On choisit également des points $y_k^{(m)} \in e_k^{(m)}$. Par l'interprétation de Riemann de l'intégrale, on a

$$\begin{aligned}\int_K u(\psi(\varphi(.,y))dy &= \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=0}^{M_m} u(\psi\varphi(.,y_k^{(m)}))mes(e_k^{(m)}) \\ &= \lim_{m\to+\infty} u\Big(\sum_{k=0}^{M_m} \psi\varphi(.,y_k^{(m)})mes(e_k^{(m)})\Big).\end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que

$$\sum_{k=0}^{M_m} \psi\varphi(.,y_k^{(m)})mes(e_k^{(m)}) \to \psi \int_K \varphi(.,y)dy$$

dans $D(\Omega)$. Les supports de toutes ces fonctions sont inclus dans le support de $\psi$. Il reste donc à voir que

$$\sum_{k=0}^{M_m} \varphi(.,y_k^{(m)})mes(e_k^{(m)}) \to \int_K \varphi(.,y)dy$$

uniformément sur le support de $\psi$ avec toutes les dérivées. Pour tout multi-indice $\alpha$, on a

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in[\psi]} \Big| D_x^\alpha \Big( \sum_{k=0}^{M_m} \varphi(x,y_k^{(m)})mes(e_k^{(m)}) - \int_K \varphi(x,y)dy \Big) \Big| \\
&= \sup_{x\in[\psi]} \Big| \sum_{k=0}^{M_m} \int_{e_k^{(m)}} (D_x^\alpha\varphi(x,y_k^{(m)}) - D_x^\alpha\varphi(x,y))dy \Big| \\
&\leq mes(K) \sup_{x\in[\psi]} \sup_{\substack{|y-y'|\leq\epsilon_m \\ y,y'\in K}} |D_x^\alpha\varphi(x,y) - D_x^\alpha\varphi(x,y')|.
\end{aligned}$$

Cette expression converge vers 0 si $m$ tend vers l'infini car les dérivées de $\varphi$ sont uniformément continues dans tout compact de $\Omega \times U$. $\square$

### Quelques conséquences

Ecrivons $x = (x', x'') \in \mathbb{R}^{n'} \times \mathbb{R}^{n''} = \mathbb{R}^n$. Si $\varphi' \in D(\mathbb{R}^{n'})$ et $\varphi'' \in D(\mathbb{R}^{n''})$, la fonction $\varphi' \otimes \varphi'' \in D(\mathbb{R}^n)$ est définie par

$$(\varphi' \otimes \varphi'')(x) = \varphi'(x')\varphi''(x'').$$

On a

$$[\varphi' \otimes \varphi''] = [\varphi'] \times [\varphi''].$$

**Proposition 2.5.3** *Si $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $u \in D'(\Omega)$ et $u(\varphi' \otimes \varphi'') = 0$ pour tous $\varphi' \in D(\mathbb{R}^{n'})$ et $\varphi'' \in D(\mathbb{R}^{n''})$ tels que $[\varphi' \otimes \varphi''] \subset \Omega$ alors $u = 0$.*

*Preuve.* Soient $\psi' \in D(\mathbb{R}^{n'})$ et $\psi'' \in D(\mathbb{R}^{n''})$ des fonctions d'intégrales égales à 1 dont le support est inclus dans la boule unité. Posons $\psi = \psi' \otimes \psi''$ et $\psi_m(x) = m^n\psi(mx)$.

Soit $\varphi \in D(\Omega)$. En vertu de l'exemple 2.1.4, les fonctions $\varphi*\psi_m$ appartiennent à $D(\Omega)$ pour $m$ assez grand et convergent vers $\varphi$ dans $D(\Omega)$. Par le théorème 2.5.2, on a

$$\begin{aligned}
u(\varphi) &= \lim_{m\to+\infty} u(\varphi * \psi_m) \\
&= \lim_{m\to+\infty} u_{(x)}\Big(\int \varphi(y)\psi_m(x-y)\,dy\Big) \\
&= \lim_{m\to+\infty} \int \varphi(y)\,u_{(x)}(\psi_m(x-y))\,dy)
\end{aligned}$$

Si $y \in [\varphi]$ et $m$ est assez grand, la fonction $x \mapsto \psi_m(x-y) = \psi'_m(x'-y')\psi''_m(x''-y'')$ appartient à $D(\Omega)$. Ainsi $u(\varphi) = 0$. □

Le théorème 2.5.2 nous permet aussi d'établir un théorème de structure des distributions.

**Théorème 2.5.4** *Si $u$ est une distribution à support compact dans $\mathbb{R}^n$, il existe un multi-indice $\alpha$ et une fonction continue $f$ dans $\mathbb{R}^n$ tels que*

$$u(\varphi) = \int f D^\alpha \varphi \, d\lambda, \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^n).$$

*Preuve.* Pour tout $\mu \in \mathbb{N}_0^n$, considérons la fonction auxiliaire

$$e_\mu(x) = \frac{x^{\mu-1}}{(\mu-1)!} \chi_{]0,+\infty[\times\cdots\times]0,+\infty[}(x)$$

définie dans $\mathbb{R}^n$. Par convention, $\mu - 1 = (\mu_1 - 1, \ldots, \mu_n - 1)$. La fonction $e_\mu$ est localement intégrable quel que soit $\mu$, donc elle est composable avec toute fonction de $D(\mathbb{R}^n)$. Montrons que

$$D^\mu(e_\mu * \varphi) = \varphi \ , \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^n), \ \mu \in \mathbb{N}_0^n.$$

On a

$$\begin{aligned}(e_\mu * \varphi)(x) &= \int e_\mu(x-y)\varphi(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} \frac{(x_1-y_1)^{\mu_1-1}}{(\mu_1-1)!} \cdots \frac{(x_n-y_n)^{\mu_n-1}}{(\mu_n-1)!} \varphi(y)dy\end{aligned}$$

donc

$$D^\alpha(e_\mu * \varphi) = e_{\mu-\alpha} * \varphi \ \text{ si } \ \mu_j \geq \alpha_j + 1 \ \text{ pour tout } j.$$

Pour $\mu = (1, \ldots, 1)$, on trouve

$$D^\mu(e_\mu * \varphi) = \varphi,$$

d'où la conclusion.

Soit $\psi \in D(\mathbb{R}^n)$ une fonction d'intégrale 1 et dont le support est inclus dans la boule unité. Posons $\psi_k(x) = k^n\psi(kx)$. En vertu de l'exemple 2.1.4, on a

$$u(\varphi) = \lim_{k\to+\infty} u(\varphi * \psi_k) = \lim_{k\to+\infty} u(D^\mu(e_\mu * \varphi * \psi_k))$$

$$= \lim_{k\to+\infty} u(e_\mu * D^\mu\varphi * \psi_k) = \lim_{k\to+\infty} u_{(x)}\left(\int (e_\mu * \psi_k)(x-y)D^\mu\varphi(y)dy\right)$$

pour tout $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ et $\mu \in \mathbb{N}_0^n$. Par le théorème 2.5.2, on obtient encore

$$u(\varphi) = \lim_{k\to+\infty} \int u_{(x)}((e_\mu * \psi_k)(x-y))D^\mu\varphi(y)dy.$$

Il reste donc à démontrer que les fonctions $f_k(y) = u_{(x)}(e_\mu * \psi_k(x-y))$ convergent uniformément dans tout compact vers une fonction continue $f$. On utilise pour cela le critère de Cauchy de la convergence uniforme. Il existe un compact $K$ de $\mathbb{R}^n$ et des constantes $C, N$ telles que

$$|u(f)| \leq C \sup_{|\alpha|\leq N} \sup_K |D^\alpha f| \text{ pour tout } f \in C_\infty(\mathbb{R}^n).$$

Si $K_1$ est un compact de $\mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned}
\sup_{y\in K_1} |f_r(y) - f_s(y)| &= \sup_{y\in K_1} |u_{(x)}(e_\mu * \psi_r(x-y) - e_\mu * \psi_s(x-y))| \\
&\leq C \sup_{y\in K_1} \sup_{|\alpha|\leq N} \sup_{x\in K} |D^\alpha(e_\mu * \psi_r(x-y) - e_\mu * \psi_s(x-y))| \\
&\leq C \sup_{|\alpha|\leq N} \sup_{K-K_1} |e_{\mu-\alpha} * \psi_r - e_{\mu-\alpha} * \psi_s|
\end{aligned}$$

lorsque $\mu_j \geq N+1$ pour tout $j$. Si on choisit $\mu$ tel que $\mu_j \geq N+2$ pour tout $j$, les fonctions $e_{\mu-\alpha}$ sont continues dans $\mathbb{R}^n$ pour tout $\alpha$ vérifiant $|\alpha| \leq N$. Les fonctions $e_{\mu-\alpha} * \psi_m$ convergent donc uniformément vers $e_{\mu-\alpha}$ dans tout compact de $\mathbb{R}^n$ si $|\alpha| \leq N$. Ceci prouve que les fonctions $f_k$ vérifient le critère de Cauchy de la convergence uniforme.
□

**Cas général**

Voici un théorème général de permutation d'une distribution et d'une intégrale.

**Théorème 2.5.5** *Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\Lambda$ une partie mesurable de $\mathbb{R}^p$, $u$ une distribution à support compact dans $\Omega$ et $\varphi$ une fonction mesurable dans $\Omega \times \Lambda$ telle que*
(i) *$\varphi(.,\lambda)$ est de classe $C_\infty$ dans $\Omega$ pour presque tout $\lambda \in \Lambda$,*
(ii) *pour tout compact $K$ de $\Omega$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, il existe une fonction $F_\alpha \in L_1(\Lambda)$ telle que*

$$\sup_{x\in K} |D_x^\alpha \varphi(x,\lambda)| \leq F_\alpha(\lambda)$$

*pour presque tout $\lambda \in \Lambda$. Alors la fonction $\lambda \to u(\varphi(.,\lambda))$ est intégrable dans $\Lambda$ et*

$$\int_\Lambda u(\varphi(.,\lambda))\, d\lambda = u\left(\int_\Lambda \varphi(.,\lambda)\, d\lambda\right).$$

## 2.6 Limites de distributions

### 2.6.1 Rappels sur les espaces de Fréchet

L'étude des limites de distributions nécessite la connaissance d'un résultat de la théorie des espaces de Fréchet, le théorème de Banach-Steinhaus. Etablissons ce théorème.

Soit $E$ un espace vectoriel complexe. Une *semi-norme* $p$ sur $E$ est une fonction définie sur $E$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et telle que

$$p(cf) = |c|p(f) \ \ , \ \ p(f+g) \leq p(f) + p(g)$$

pour tous $f, g \in E$ et $c \in \mathbb{C}$.

Si $p$ est une semi-norme, on a $p(0) = 0$, $p(e) \geq 0$ pout tout $e \in E$,

$$p\Big(\sum_{j=1}^{N} c_j f_j\Big) \leq \sum_{j=1}^{N} |c_j| p(f_j)$$

pour toute combinaison linéaire d'éléments de $E$ et

$$|p(f) - p(g)| \leq p(f-g)$$

pour tous $f, g \in E$.

Une semi-norme $p$ sur $E$ est une *norme* si $p(f) = 0$ implique $f = 0$.

Si $r > 0$ on pose

$$B_p(r) = \{f \in E : p(f) < r\}, \quad b_p(r) = \{f \in E : p(f) \leq r\}.$$

Par exemple, si $K$ est un compact de $\mathbb{R}^n$, l'expression

$$p_k(\varphi) = \sup_{|\alpha| \leq k} \sup_K |D^\alpha \varphi| \ , \quad \varphi \in D(K),$$

définit une norme sur $D(K)$ pour tout entier $k$. Si $u$ est une distribution dans un ouvert $\Omega$ contenant $K$,

$$p(\varphi) = |u(\varphi)| \ , \quad \varphi \in D(K),$$

définit une semi-norme sur $D(K)$.

Un *espace de Fréchet* est un espace vectoriel complexe $E$ muni d'une suite de semi-normes $p_m$, $m \in \mathbb{N}$, telles que

(i) $E$ est séparé : si $f \in E$ et $p_m(f) = 0$ pour tout $m$ alors $f = 0$,

(ii) la suite $p_m$ est croissante : $p_m(f) \leq p_{m+1}(f)$, $f \in E$, $m \in \mathbb{N}$,

(iii) toute suite de Cauchy de $E$ est convergente : si $f_k$ est une suite d'éléments de $E$ telle que

$$p_m(f_r - f_s) \to 0 \ \text{ si } \ r, s \to \infty$$

pour tout $m$ fixé, alors il existe un élément $f \in E$ tel que

$$p_m(f - f_k) \to 0 \ \text{ si } \ k \to \infty$$

pour tout $m$ fixé.

Si $K$ est un compact de $\mathbb{R}^n$, $D(K)$ muni des semi-normes $p_k$ définies ci-dessus est un espace de Fréchet en vertu du théorème 2.1.3. Sauf mention du contraire, nous munirons toujours $D(K)$ de ces semi-normes.

Une semi-norme $p$ sur un espace de Fréchet $E$ défini par les semi-normes $p_m$, $m \in \mathbb{N}$, est dite *continue* s'il existe une constante $C$ et un entier $m$ tels que

$$p(f) \leq C p_m(f) \ , \quad f \in E.$$

Un espace de Fréchet est un espace métrique complet pour la distance

$$d(f,g) = \sum_{m=0}^{+\infty} 2^{-m} \frac{p_m(f-g)}{1+p_m(f-g)}.$$

L'inégalité triangulaire résulte de l'inégalité

$$\frac{x+y}{1+x+y} \leq \frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y}$$

valable si $x, y \geq 0$.

Le théorème que nous avons en vue est le suivant.

**Théorème 2.6.1 (Banach-Steinhaus)** *Si* $\Pi$ *est un ensemble de semi-normes continues sur un espace de Fréchet* $E$ *tel que*

$$\sup_{p \in \Pi} p(f) < +\infty \tag{2.2}$$

*pour tout* $f \in E$ *alors*

$$\pi(f) = \sup_{p \in \Pi} p(f)$$

*est une semi-norme continue sur* $E$.

Donnons deux démonstrations de ce théorème. La première est une application du théorème de Baire. La seconde est autonome mais plus technique.

**Théorème 2.6.2 (Baire)** *Dans un espace métrique complet, toute union dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.*

*Preuve.* On désigne par $B(x,r)$ (resp. $b(x,r)$) la boule ouverte (resp. fermée) de centre $x$ et de rayon $r$.

On procède par l'absurde. Soit $F_m$ une suite de fermés d'intérieur vide d'un espace métrique complet $E$. Supposons que $F = \cup_{m=1}^{\infty} F_m$ est d'intérieur non vide. Il existe $x_0 \in E$ et $r_0 > 0$ tels que $b(x_0, r_0) \subset F$.

Puisque $F_1$ est d'intérieur vide, il existe $x_1 \in B(x_0, r_0) \setminus F_1$. Comme $F_1$ est fermé, il existe $r_1 \in ]0, r/2[$ tel que $b(x_1, r_1) \subset b(x_0, r_0) \setminus F_1$.

Puisque $F_2$ est d'intérieur vide, il existe $x_2 \in B(x_1, r_1) \setminus F_2$. Comme $F_2$ est fermé, il existe $r_2 \in ]0, r_1/2[$ tel que $b(x_2, r_2) \subset b(x_1, r_1) \setminus F_2$.

Puisque $F_3$ est d'intérieur vide, il existe $x_3 \in B(x_2, r_2) \setminus F_3$. Comme $F_3$ est fermé, il existe $r_3 \in ]0, r_2/2[$ tel que $b(x_3, r_3) \subset b(x_2, r_2) \setminus F_3$.

......

La suite $x_m$ ainsi construite est de Cauchy car de

$$d(x_{m+1}, x_m) \leq r_m \leq \frac{r_{m-1}}{2} \leq \ldots \leq 2^{-m} r_0.$$

on déduit

$$d(x_p, x_q) \leq \sum_{k=p}^{q-1} 2^{-k} \leq 2^{-p+1}$$

si $p < q$. La suite $x_m$ converge donc vers un élément $x$ de $E$.

Par construction $b(x_m, r_m) \subset \ldots \subset b(x_0, r_0) \subset F$ donc $x \in F$. De même, si $m \geq p \geq 1$, on a $b(x_m, r_m) \subset b(x_p, r_p) \subset b(x_{p-1}, r_{p-1}) \setminus F_p$. Ainsi $x \notin F_p$ pour tout $p$ ce qui est absurde. □

*Première démonstration du théorème 2.6.1.* On désigne comme ci-dessus par $p_m$, $m \in \mathbb{N}$, une suite de semi-normes qui définit $E$.

Puisque $\Pi$ est un ensemble de semi-normes continues, l'ensemble

$$F_k = \{f \in E : \pi(f) \leq k\} = \bigcap_{p \in \Pi} \{f \in E : p(f) \leq k\}$$

est fermé pour tout entier positif $k$. Par l'hypothèse (2.2), l'union des $F_k$ est $E$. Cela étant, le théorème de Baire affirme qu'il existe un entier $k$ tel que $F_k$ soit d'intérieur non vide.

Il existe donc $g \in E$, un entier $m$ et $r > 0$ tels que $g + b_{p_m}(r) \subset F_k$. Si $p_m(f) \leq r$ alors $g + f \in F_k$ donc $\pi(f + g) \leq k$. Puisque $g$ appartient aussi à $F_k$, on obtient

$$\pi(f) \leq \pi(f + g) + \pi(g) \leq 2k.$$

Ceci prouve que

$$\pi(f) \leq \frac{2k}{r} p_m(f)$$

pour tout $f$ donc $\pi$ est continu. □

*Deuxième démonstration du théorème 2.6.1.* Nous utilisons une technique connue sous le nom de bosse mobile.

Il est immédiat que $\pi$ est une semi-norme sur $E$. Supposons que $\pi$ n'est pas continu.

Pour tout entier $m \in \mathbb{N}_0$, il existe donc $\pi_m \in \Pi$ et $f_m \in E$ tels que

$$\pi_m(f_m) > m p_m(f_m).$$

Puisque $\Pi$ est un ensemble de semi-normes continues, il existe des constantes $C_m$ et une suite d'entiers $\mu_m$ tels que

$$\pi_m(f) \leq C_m p_{\mu_m}(f)\ , \quad f \in E,\ m \geq 1.$$

On pose $C_0 = \mu_0 = 1$. On peut supposer que les suites $C_m$ et $\mu_m$ sont croissantes.

Montrons qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers $\nu_m$, $m \geq 0$, telle que

$$\nu_m \geq \mu_{\nu_{m-1}}\ , \quad m \geq 1,$$

et

$$\pi_{\nu_m}(g_1 + \cdots + g_m) \geq m, \quad m \geq 1$$

où

$$g_m = \frac{2^{1-m}}{C_{\nu_{m-1}}} \frac{\nu_m f_{\nu_m}}{\pi_{\nu_m}(f_{\nu_m})}, \quad m \geq 1.$$

On prend $\nu_0 = 0$ et $\nu_1 = 1$. Si $\nu_0, \ldots, \nu_{m-1}$ ont été choisis, il suffit de prendre $\nu_m$ tel que

$$\nu_m > \sup(\nu_{m-1}, \mu_{\nu_{m-1}})$$

et

$$\nu_m \geq 2^{m-1} C_{\nu_{m-1}} \left( m + \sup_{p \in \Pi} p(g_1 + \cdots + g_{m-1}) \right).$$

De fait, on a alors

$$\begin{aligned} \pi_{\nu_m}(g_1 + \cdots + g_m) &\geq \pi_{\nu_m}(g_m) - \pi_{\nu_m}(g_1 + \cdots + g_{m-1}) \\ &\geq \frac{2^{1-m}}{C_{\nu_{m-1}}} \nu_m - \pi_{\nu_m}(g_1 + \cdots + g_{m-1}) \geq m. \end{aligned}$$

La série

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k$$

converge dans $E$. De fait, pour tout entier $m$ on a, si $s \geq r \geq m$,

$$\begin{aligned} p_m\left(\sum_{k=r}^{s} g_k\right) &\leq \sum_{k=r}^{s} p_m(g_k) \leq \sum_{k=r}^{s} p_{\nu_k}(g_k) \\ &\leq \sum_{k=r}^{s} \frac{2^{1-k}}{C_{\nu_{k-1}}} \nu_k \frac{p_{\nu_k}(f_{\nu_k})}{\pi_{\nu_k}(f_{\nu_k})} \leq \sum_{k=r}^{s} 2^{1-k}. \end{aligned}$$

La dernière majorante tend vers 0 si $r$ et $s$ tendent vers $+\infty$. Notons $g$ la limite de cette série. Si $k > m$, on a

$$\begin{aligned} \pi_{\nu_m}(g_k) &= \frac{2^{1-k}\nu_k}{C_{\nu_{k-1}}} \frac{\pi_{\nu_m}(f_{\nu_k})}{\pi_{\nu_k}(f_{\nu_k})} \\ &\leq 2^{1-k} \frac{C_{\nu_m}}{C_{\nu_{k-1}}} \frac{p_{\mu_{\nu_m}}(f_{\nu_k})}{p_{\nu_k}(f_{\nu_k})} \leq 2^{1-k} \end{aligned}$$

car la suite $\nu_m$ est strictement croissante. Cela étant,

$$\begin{aligned}\pi_{\nu_m}(g) &\geq \pi_{\nu_m}(g_1 + \cdots + g_m) - \sum_{k=m+1}^{+\infty} \pi_{\nu_m}(g_k) \\ &\geq m - \sum_{k=m+1}^{\infty} 2^{1-k} = m - 2^{1-m}.\end{aligned}$$

La suite $\pi_{\nu_m}(g)$ n'est donc pas bornée. Ceci contredit l'hypothèse car $\pi_{\nu_m} \in \Pi$ pour tout $m$. □

### 2.6.2 Convergence des distributions

Le premier résultat est une conséquence immédiate du théorème de Banach-Steinhaus.

**Théorème 2.6.3** *Si $u_m$ est une suite de distributions dans un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$ telle que la limite*

$$u(\varphi) = \lim_{m \to +\infty} u_m(\varphi)$$

*existe pour tout $\varphi \in D(\Omega)$ alors $u \in D'(\Omega)$. De plus, si $K$ est un compact de $\Omega$, il existe des constantes $C$, $k$, telles que*

$$|u_m(\varphi)| \leq C \sup_{|\alpha| \leq k} \sup_K |D^\alpha \varphi| \,, \quad \varphi \in D(K),$$

*pour tout $m$.*

*Preuve.* Puisque $u_m$ est une distribution pour tout $m$, $u$ est une fonctionnelle linéaire sur $D(\Omega)$. Pour tout compact $K$ de $\Omega$ et tout entier $m$,

$$q_m(\varphi) = |u_m(\varphi)| \,, \quad \varphi \in D(K),$$

est une semi-norme continue sur $D(K)$ car $u_m$ est une distribution. Ces semi-normes vérifient les hypothèses du théorème 2.6.1. Il existe donc des constantes $C$, $k$ telles que

$$\sup_{m \in \mathbb{N}_0} q_m(\varphi) \leq C \sup_{|\alpha| \leq k} \sup_K |D^\alpha \varphi| \,, \quad \varphi \in D(K).$$

Il s'ensuit que

$$|u(\varphi)| \leq C \sup_{|\alpha| \leq k} \sup_K |D^\alpha \varphi| \,, \quad \varphi \in D(K).$$

Ceci prouve que $u$ est une distribution. □

**Définition 2.6.4** *On dit qu'une suite $u_m \in D'(\Omega)$ converge vers $u$ dans $D'(\Omega)$ si*

$$u(\varphi) = \lim_{m \to +\infty} u_m(\varphi)$$

*pour tout $\varphi \in D(\Omega)$.*

Ce théorème possède le renforcement suivant.

**Théorème 2.6.5** *Si $u_m$ est une suite de distributions dans $\mathbb{R}^n$ qui convergent vers 0 et dont les supports sont inclus dans un compact fixe, il existe un multi-indice $\alpha$ et une suite $f_m$ de fonctions continues dans $\mathbb{R}^n$ telles que*

*(i) $u_m(\varphi) = \int f_m(x) D^\alpha \varphi(x) dx$ , $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$,*

*(ii) $f_m$ converge uniformément vers 0 dans tout compact de $\mathbb{R}^n$.*

*En particulier, il existe un compact $K$ de $\mathbb{R}^n$, un entier $k$ et une suite $c_m$ qui converge vers 0 telle que*

$$|u_m(\varphi)| \leq c_m \sup_{|\beta| \leq k} \sup_K |D^\beta \varphi| \quad , \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^n).$$

*Preuve.* En vertu du théorème 2.6.3, il existe un compact $K$ de $\mathbb{R}^n$ et des constantes $C, N$ telles que

$$|u_m(f)| \leq C \sup_{|\alpha| \leq N} \sup_K |D^\alpha f|$$

pour tout $m$ et tout $f \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$.

Posons

$$f^{(\mu)}_{m,k}(y) = u_{m(x)}(e_\mu * \psi_k(x-y))$$

pour tout $\mu \in \mathbb{N}^n$ tel que $\mu_j \geq N+2$. Par la démonstration du théorème 2.5.4, les fonctions $f^{(\mu)}_{m,k}$ convergent uniformément sur tout compact vers une fonction continue $f^{(\mu)}_m$ lorsque $k$ tend vers $+\infty$ et

$$u_m(\varphi) = \int f^{(\mu)}_m(x) D^\mu \varphi(x)\, dx \quad , \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^n).$$

Par construction, les supports des fonctions $f^{(\mu)}_{m,k}$ et $f^{(\mu)}_m$ sont inclus dans le fermé

$$K + b(1) + ]-\infty, 0]^n.$$

De là

$$f^{(\mu+1)}_{m,k}(y) = u_{m,(x)}(e_{\mu+1} * \psi_k(x-y)) = \int f^{(\mu)}_m(x)(e_1 * \psi_k)(x-y) dx$$

et

$$f^{(\mu+1)}_m(y) = \int f^{(\mu)}_m(x) e_1(x-y) dx.$$

Fixons $\mu$. Si $K_1$ est un compact de $\mathbb{R}^n$ et $y \in K_1$, on a

$$\begin{aligned} |f^{(\mu)}_{m,k}(y)| &\leq C \sup_{|\alpha| \leq N} \sup_{x \in K} |D^\alpha e_\mu * \psi_k(x-y)| \\ &= C \sup_{|\alpha| \leq N} \sup_{x \in K} |e_{\mu-\alpha} * \psi_k(x-y)| \\ &\leq C \sup_{|\alpha| \leq N} \sup_{K-K_1+b(1)} |e_{\mu-\alpha}|. \end{aligned}$$

Il existe donc une constante $C_1$ telle que

$$\sup_{K_1} |f_m^{(\mu)}| \leq C_1.$$

Montrons que les fonctions $f_m^{(\mu)}$ convergent ponctuellement vers 0. Fixons $x \in \mathbb{R}^n$, $\epsilon > 0$ et écrivons

$$f_m^{(\mu)}(x) = \left(f_m^{(\mu)}(x) - f_{m,k}^{(\mu)}(x)\right) + f_{m,k}^{(\mu)}(x).$$

Comme ci-dessus, on vérifie que si $K_1$ est un compact de $\mathbb{R}^n$,

$$\sup_{K_1} |f_{m,k}^{(\mu)} - f_{m,\ell}^{(\mu)}| \leq C \sup_{|\alpha|\leq N} \sup_{K-K_1} |e_{\mu-\alpha} * \psi_k - e_{\mu-\alpha} * \psi_l|.$$

La majorante converge vers 0 si $k$ et $l$ tendent vers $+\infty$. On peut donc rendre $|f_m^{(\mu)}(x) - f_{m,k}^{(\mu)}(x)|$ inférieur à $\frac{\epsilon}{2}$ pour tout $m$ en prenant $k$ assez grand. Ensuite, $k$ étant fixé, on prend $m$ assez grand pour que $f_{m,k}^{(\mu)}(x)$ soit également inférieur $\frac{\epsilon}{2}$. Ceci est possible car par hypothèse, la suite $u_m$ converge vers 0. Pour tout compact $K_1$ de $\mathbb{R}^n$, on a

$$\sup_{K_1} |f_m^{(\mu+1)}| \leq \int |f_m^{(\mu)}(x)| \sup_{y\in K_1} |e_1(x-y)|dx.$$

Il résulte donc du théorème de Lebesgue que la suite $f_m^{(\mu+1)}$ converge uniformément vers 0 dans tout compact de $\mathbb{R}^n$. $\square$

Donnons quelques exemples.

a) Soit $\psi \in D(\mathbb{R}^n)$. Pour tout $\epsilon > 0$, posons

$$\psi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}\psi(x/\epsilon)$$

et

$$u_\epsilon(\varphi) = \int \psi_\epsilon(x)\varphi(x)dx\ , \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^n).$$

On a

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon\to 0+} u_\epsilon(\varphi) &= \lim_{\epsilon\to 0+} \int \psi_\epsilon(x)\varphi(x)dx \\ &= \lim_{\epsilon\to 0+} \int \psi(x)\varphi(\epsilon x)dx = \varphi(0)\int \psi(x)dx. \end{aligned}$$

Ceci prouve que

$$u_\epsilon \to \int \psi(x)dx \cdot \delta_0.$$

b) Soit $\psi \in D(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$\int x^\alpha \psi(x)dx = 0 \quad \text{si} \quad |\alpha| < k.$$

Posons, si $\epsilon > 0$,

$$u_\epsilon(\varphi) = \epsilon^{-n-k} \int \psi\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \varphi(x)dx \ , \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^n).$$

Par la formule de Taylor, on a

$$\begin{aligned} u_\epsilon(\varphi) &= \epsilon^{-k} \int \psi(x)\varphi(\epsilon x)dx \\ &= k \sum_{|\alpha|=k} \int \frac{x^\alpha}{\alpha!} \psi(x)dx \int_0^1 (1-t)^{k-1} D^\alpha \varphi(t\epsilon x)dx \\ &\to \sum_{|\alpha|=k} \int \frac{x^\alpha}{\alpha!} \psi(x)dx \cdot D^\alpha \varphi(0) \end{aligned}$$

si $\epsilon \to 0+$. Cela étant,

$$u_\epsilon \to \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha D^\alpha \delta_0$$

avec

$$c_\alpha = (-1)^{|\alpha|} \int \frac{x^\alpha}{\alpha!} \psi(x)dx.$$

c) Soit $k$ un entier positif et

$$u_m(\varphi) = m^k \int e^{imx} \varphi(x)dx \ , \quad \varphi \in D(\mathbb{R}).$$

Pour tout $\varphi \in D(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} u_m(\varphi) &= m^{k-1} \int \frac{1}{i} D_x(e^{imx})\varphi(x)dx = im^{k-1} \int e^{imx} D\varphi(x)dx \\ &= \cdots = i^k \int e^{imx} D^k \varphi(x)dx \to 0 \end{aligned}$$

si $m \to +\infty$ en vertu du théorème de Riemann-Lebesgue.

d) Posons

$$\psi_m(x) = me^{imx} \text{ si } x > 0 \ \text{ et } \ \psi_m(x) = 0 \text{ si } x \leq 0.$$

On a ici

$$\begin{aligned} u_m(\varphi) &= \int_0^{+\infty} me^{imx} \varphi(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{i} D_x(e^{imx})\varphi(x)dx \\ &= i\varphi(0) + i \int_0^{+\infty} e^{imx} D\varphi(x)dx \to i\varphi(0) \end{aligned}$$

si $m \to +\infty$. Ainsi $u_m \to i\delta_0$.

# Chapitre 3

# Produit de composition

L'objet de ce chapitre est de montrer que le produit de composition possède une extension naturelle aux distributions. Elle sera abondamment utilisée dans le chapitre 5.

## 3.1 Fermés composables

Bien que d'autres extensions soient possibles, le produit de composition de deux distributions n'est en général défini que si leurs supports sont composables au sens suivant.

**Définition 3.1.1** *Soit $p$ un entier strictement positif. Des fermés non vides $F_1, \ldots, F_p$ de $\mathbb{R}^n$ sont dits composables si*

$$\{(x_1, \ldots, x_p) \in F_1 \times \ldots \times F_p : x_1 + \ldots + x_p \in K\}$$

*est compact pour tout compact $K$ de $\mathbb{R}^n$.*

Dès lors, les fermés $F_1, \ldots, F_p$ sont composables si et seulement si les fermés $F_{\pi(1)}, \ldots, F_{\pi(p)}$ sont composables pour toute permutation $\pi$ de $\{1, \ldots, p\}$.

**Proposition 3.1.2** *1) Deux fermés $F_1$ et $F_2$ de $\mathbb{R}^n$ sont composables si et seulement si $F_1 \cap (K - F_2)$ est compact pour tout compact $K$ de $\mathbb{R}^n$. Il s'ensuit que pour tout compact $K$ et tout fermé $F$ de $\mathbb{R}^n$, les fermés $K, F$ sont composables.*

*2) Si $F_1, \ldots, F_p$ sont composables alors*

*(i) $F_1 + \ldots + F_p$ est fermé,*

*(ii) $F_1, \ldots, F_p, K$ sont composables pour tout compact $K$ de $\mathbb{R}^n$,*

*(iii) $F_1, \ldots, F_{p-1}$ sont composables (avec $p > 1$),*

*(iv) $F_1, F_2, \ldots, F_{p-2}, F_{p-1} + F_p$ sont composables (avec $p > 1$).*

*Preuve.* 1) On a d'une part

$$\{(x_1, x_2) \in F_1 \times F_2 : x_1 + x_2 \in K\} \subset (F_1 \cap (K - F_2) \times (K - (F_1 \cap (K - F_2)).$$

Dès lors, si $F_1 \cap (K - F_2)$ est compact, les fermés $F_1$ et $F_2$ sont composables.

Réciproquement, si $K$ est un compact, le fermé $F_1 \cap (K - F_2)$ est inclus dans la première projection de

$$\{(x, y) \in F_1 \times F_2 : x + y \in K\};$$

d'où la conclusion.

2) Supposons que $F_1, \ldots, F_p$ soient composables.

Prouvons (i). Soit $(x_m)_{m \geq 1}$ une suite de $F_1 + \ldots + F_p$ qui converge vers un point $x$. Ecrivons $x_m = x_m^{(1)} + \ldots + x_m^{(p)}$ avec $x_m^{(j)} \in F_j$ pour tout $j$. La suite $x_m$ étant convergente, $K = \{x\} \cup \{x_m : m \geq 1\}$ est compact. Vu l'hypothèse, toutes les suites $x_m^{(j)}$ possèdent des sous-suites convergentes vers des points $x_j \in F_j$. On a $x = x_1 + \ldots + x_p \in F_1 + \ldots + F_p$.

Le point (ii) résulte de l'inclusion

$$\{(x_1, \ldots, x_p, x) \in F_1 \times \ldots \times F_p \times K : x_1 + \ldots + x_p + x \in M\}$$

$$\subset \{(x_1, \ldots, x_p) \in F_1 \times \ldots \times F_p : x_1 + \ldots + x_p \in M - K\} \times K.$$

Le point (iii) résulte du fait que si $y_p \in F_p$, l'ensemble

$$\{(x_1, \ldots, x_{p-1}) \in F_1 \times \ldots \times F_{p-1} : x_1 + \ldots + x_{p-1} \in K\}$$

est inclus dans la projection sur les $p - 1$ premières variables de

$$\{(x_1, \ldots, x_p) \in F_1 \times \ldots \times F_p : x_1 + \ldots + x_p \in y_p + K\}.$$

Pour le point (iv), on remarque que

$$\{(x_1, \ldots, x_{p-1}) \in F_1 \times \ldots \times (F_{p-1} + F_p) : x_1 + \ldots + x_{p-1} \in K\}$$

est l'image de

$$\{(x_1, \ldots, x_p) \in F_1 \times \ldots \times F_p : x_1 + \ldots + x_p \in K\}$$

par l'application continue $(x_1, \ldots, x_p) \mapsto (x_1, x_2, \ldots, x_{p-1} + x_p)$. $\square$

## 3.2 Composition d'une distribution et d'une fonction

**Définition 3.2.1** *Soient $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$. Si $[u]$ et $[\varphi]$ sont composables, le produit de composition de $u$ et $\varphi$ est la fonction $u * \varphi$ définie dans $\mathbb{R}^n$ par*

$$(u * \varphi)(x) = u_{(y)}(\varphi(x - y)).$$

*On dit que $u$ et $\varphi$ sont composables.*

Puisque $[u] \cap [\varphi(x - .)] = [u] \cap (x - [\varphi])$ est compact pour tout $x$, $u * \varphi$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Cette définition étend le produit de composition de deux fonctions.

**Propriété 3.2.2** *Si $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ sont tels que $[f]_{pp}$ et $[g]_{pp}$ soient composables, alors $f$ et $g$ sont composables et $f * g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Si en outre $g \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$, alors $f * g \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$ et on a $u_f * g(x) = f * g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.*

*Preuve.* Soit $K$ un compact de $\mathbb{R}^n$. Si $x \in K$, on a

$$\begin{aligned} f(.)g(x - .) &= f\chi_{[f]_{pp} \cap (x-[g]_{pp})}(.)g\chi_{[g]_{pp} \cap (x-[f]_{pp})}(x - .) \\ &= f\chi_{[f]_{pp} \cap (K-[g]_{pp})}(.)g\chi_{[g]_{pp} \cap (K-[f]_{pp})}(x - .). \end{aligned}$$

Dès lors, comme $f\chi_{[f]_{pp} \cap (x-[g]_{pp})}$ et $g\chi_{[g]_{pp} \cap (K-[f]_{pp})}$ sont composables (ce sont des éléments de $L^1(\mathbb{R}^n)$ et que leur produit de composition est intégrable dans $\mathbb{R}^n$, on conclut.

Si en outre $g \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$, le produit de composition existe pour tout $x$ et le théorème des intégrales paramétriques permet de conclure. De plus, pour $h \in D(\mathbb{R}^n)$ égal à 1 au voisinage de $[f]_{pp} \cap (x - [g])$, on a

$$u_f * g(x) = u_f(g(x - .) = u_f(hg(x - .)) = \int h(y)f(y)g(x-y)\, dy = \int f(y)g(x-y) = f * g(x).$$

□

On a aussi directement les propriétés suivantes.

**Propriété 3.2.3** *a) On a $\delta_0 * \varphi = \varphi$ pour tout $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$.*

*b) Si $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$, on a $u * \varphi(0) = u(\tilde{\varphi})$ avec $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(-x)$. En particulier, si $u * \varphi = 0$ pour tout $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ alors $u = 0$.*

**Théorème 3.2.4** *Si $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$ sont composables,*

- *$u * \varphi \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$,*
- *$D^\alpha(u * \varphi) = (D^\alpha u) * \varphi = u * D^\alpha \varphi$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$,*
- *$[u * \varphi] \subset [u] + [\varphi]$,*
- *si en outre $\psi \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$ et $[u]$, $[\varphi]$, $[\psi]$ sont composables alors $(u * \varphi) * \psi = u * (\varphi * \psi)$.*

*Preuve.* La fonction $u * \varphi$ est de classe $C_\infty$ en vertu du théorème 2.5.1. Seule l'hypothèse concernant les supports n'est pas immédiate. Posons $\Phi(y, x) = \varphi(x - y)$. Si $K$ est un compact de $\mathbb{R}^n$, on a

$$([u] \times K) \cap [\Phi] \subset ([u] \cap (K - [\varphi])) \times K$$

donc $([u] \times K) \cap [\Phi]$ est compact. Ainsi,

$$D^\alpha(u * \varphi)(x) = D^\alpha_x[u_{(y)}(\varphi(x - y))] = u_{(y)}(D^\alpha_x \varphi(x - y))$$

$$= (u * D^\alpha\varphi)(x) = u_{(y)}((-D_y)^\alpha\varphi(x-y)) = ((D^\alpha u) * \varphi)(x).$$

Si $x \notin [u] + [\varphi]$ alors

$$[u] \cap [\varphi(x - .)] = [u] \cap (x - [\varphi]) = \emptyset$$

donc $(u * \varphi)(x) = 0$. Puisque $[u] + [\varphi]$ est fermé, ceci prouve que $[u * \varphi] \subset [u] + [\varphi]$.

Si $[u]$, $[\varphi]$ et $[\psi]$ sont composables, alors $[u]$ et $[\varphi]$ sont composables, de même que $[\varphi]$ et $[\psi]$. De plus, $[u * \varphi]$ et $[\psi]$ sont composables car $[u * \varphi] \subset [u] + [\varphi]$ et $[\psi]$, $[u] + [\varphi]$ sont composables. De façon analogue, $u$ et $\varphi * \psi$ sont composables. Cela étant,

$$\begin{aligned} ((u * \varphi) * \psi)(x) &= \int (u * \varphi)(x-y)\psi(y)\,dy = \int u_{(z)}(\varphi(x-y-z))\psi(y)\,dy \\ &= u_{(z)}(\int \varphi(x-y-z)\psi(y)\,dy) = (u * (\varphi * \psi))(x). \end{aligned}$$

La permutation de la distribution et de l'intégrale est justifiée par le théorème 2.5.2. □

## 3.3 Composition de distributions

**Définition 3.3.1** *Soient $u, v \in D'(\mathbb{R}^n)$. Si $[u]$ et $[v]$ sont composables, le produit de composition de $u$ et $v$ est la distribution dans $\mathbb{R}^n$ définie par*

$$(u * v)(\varphi) = u_{(x)}(v_{(y)}(\varphi(x+y)), \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^n).$$

*On dit que $u$ et $v$ sont composables.*

Cette expression est définie pour tout $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$. De fait, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(x + .)$ est dans $D(\mathbb{R}^n$ et $v_{(y)}(\varphi(x+y)) = v * \widetilde{\varphi}(-x)$. Comme $[v]$ et $\widetilde{\varphi}$ sont composables, la fonction $x \mapsto v_{(y)}(\varphi(x+y))$ est de classe $C_\infty$ dans $\mathbb{R}^n$. Enfin, $[u] \cap [v_{(y)}(\varphi(. + y))] \subset [u] \cap ([\varphi] - [v])$ est compact.

Montrons que $u * v$ est une distribution. Soit $K$ un compact de $\mathbb{R}^n$. Si $\chi \in D(\mathbb{R}^n)$ est égal à 1 au voisinage de $[u] \cap (K - [v])$, il vient

$$\begin{aligned} |(u * v)(\varphi)| &= |u_{(x)}(\chi(x)v_{(y)}(\varphi(x+y)))| \\ &\leq C_1 \sup_{|\alpha| \leq k_1} \sup_{x \in [\chi]} |D_x^\alpha[\chi(x)v_{(y)}(\varphi(x+y))]| \\ &\leq C_1' \sup_{|\alpha| \leq k_1} \sup_{x \in [\chi]} |v_{(y)}(D^\alpha\varphi(x+y))| \\ &\leq C_1'C_2 \sup_{|\alpha| \leq k_1} \sup_{|\beta| \leq k_2} \sup_{x \in [\chi]} \sup_{y \in (K - [\chi])} |D^{\alpha+\beta}\varphi(x+y)| \\ &\leq C_1'C_2 \sup_{|\alpha| \leq k_1 + k_2} \sup_K |D^\alpha\varphi|. \end{aligned}$$

pour tout $\varphi \in D(K)$.

Voici quelques propriétés relatives à la composition de distributions particulières.

**Propriété 3.3.2** *a) Si $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ et $[f]_{pp}$, $[g]_{pp}$ sont composables alors $u_f * u_g = u_{f*g}$.*
*b) Si $u \in D'(\mathbb{R}^n), f \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$ sont composables, alors $u * u_f = u_{u*f}$.*

*Preuve.* a) On a

$$(u_f * u_g)(\varphi) = \int f(x)\,dx \int g(y)\varphi(x+y)\,dy = \int\int f(x)g(y)\varphi(x+y)\,dxdy$$

$$= \int\int f(x)g(x-y)\varphi(y)\,dxdy = \int(\int f(x)g(y-x)\,dx)\varphi(y)\,dy = \int (f*g)(y)\varphi(y)\,dy$$

pour tout $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$.

b) On a successivement

$$\begin{aligned}
(u * u_f)(\varphi) &= u_{(x)}(u_f(\varphi(x+y))) \\
&= u_{(x)}(u_f * \widetilde{\varphi}(-x)) \\
&= u_{(x)}(f * \widetilde{\varphi}(-x)) = u_{(x)}(f * \widetilde{\varphi}(0-x)) \\
&= u * (f * \widetilde{\varphi})(0) \\
&= ((u * f) * \widetilde{\varphi})(0) \\
&= \int (u*f)(x)\widetilde{\varphi}(0-x)\ dx \\
&= u_{u*f}(\varphi).
\end{aligned}$$

□

**Théorème 3.3.3** *Si $u, v \in D'(\mathbb{R}^n)$ et $[u], [v]$ sont composables alors*

1. *$[u * v] \subset [u] + [v]$,*
2. *si $\varphi \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$ et $[u]$, $[v]$, $[\varphi]$ sont composables alors $(u*v)*\varphi = u*(v*\ \varphi)$.*
3. *$u * v = v * u$,*
4. *si en outre $w \in D'(\mathbb{R}^n)$ et $[u]$, $[v]$, $[w]$ sont composables alors $(u*v)*w = u*(v*\ w)$,*
5. *$D^\alpha(u*v) = (D^\alpha u)*v = u*D^\alpha v$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$.*

*Preuve.* 1) Si $[\varphi] \cap ([u]+[v]) = \emptyset$ alors $[u] \cap [v_{(y)}(\varphi(.+y))] \subset [u] \cap ([\varphi]-[v]) = \emptyset$ donc $(u*v)(\varphi) = 0$. Puisque $[u]+[v]$ est fermé, ceci prouve le premier point.

2) Supposons que $\varphi \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$ et que $[u], [v], [\varphi]$ sont composables. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Par définition, on a

$$((u*v)*\varphi)(x) = (u*v)_{(y)}(\varphi(x-y)) = u_{(y)}(v_{(z)}(\chi(y+z)\varphi(x-y-z)))$$

si $\chi \in D(\mathbb{R}^n)$ est égal à 1 au voisinage de $(x-[\varphi]) \cap ([u]+[v])$.

Soit $\epsilon > 0$ et choisissons même[1] $\chi \in D(\mathbb{R}^n)$ égal à 1 dans $(x-[\varphi])\cap([u]+[v]+b(\epsilon))$. Si $y \in [u]+b(\epsilon)$, la fonction $\chi(y+.)$ est égale à 1 au voisinage de $(x-[\varphi])\cap([u]+[v]+b(\epsilon))-y \supset (x-y-[\varphi])\cap[v]$. De là, par définition, on obtient

$$v_{(z)}(\chi(y+z)\varphi(x-y-z)) = v_{(z)}(\varphi(x-y-z)) = (v*\varphi)(x-y)$$

pour tout $y \in [u]+b(\varepsilon)$. En vertu de l'égalité qui précède, on obtient alors

$$((u*v)*\varphi)(x) = u_{(y)}((v*\varphi)(x-y)) = (u*(v*\varphi))(x).$$

Ainsi $(u*v)*\varphi = u*(v*\varphi)$.

3) Cela étant, si $\varphi, \psi \in D(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\begin{aligned}(u*v)*\varphi*\psi &= u*(v*(\varphi*\psi)) = u*((v*\varphi)*\psi) = u*(\psi*(v*\varphi))\\ &= (u*\psi)*(v*\varphi) = (v*\varphi)*(u*\psi) = v*(\varphi*(u*\psi))\\ &= v*((u*\psi)*\varphi) = v*(u*(\varphi*\psi)) = (v*u)*\varphi*\psi\end{aligned}$$

car le produit de composition des fonctions est commutatif. Ceci prouve que $(u*v)*\varphi = (v*u)*\varphi$ pour tout $\varphi$ donc $u*v = v*u$.

4) De même, si $[u], [v]$ et $[w]$ sont composables,

$$\begin{aligned}(u*(v*w))*\varphi &= u*((v*w)*\varphi) = u*(v*(w*\varphi))\\ &= (u*v)*(w*\varphi) = ((u*v)*w)*\varphi\end{aligned}$$

donc $u*(v*w) = (u*v)*w$.

5) Enfin, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et tout $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$, vu les résultats relatifs à la composition d'une fonction et d'une distribution et vu ce qui précède, on obtient

$$\begin{aligned}D^\alpha((u*v)*\varphi) = (D^\alpha(u*v))*\varphi &= (u*v)*D^\alpha\varphi = u*(v*D^\alpha\varphi)\\ &= u*((D^\alpha v)*\varphi) = (u*D^\alpha v)*\varphi.\end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration puisque le produit de composition est commutatif. □

En général, l'égalité n'a pas lieu dans l'inclusion $[u*v] \subset [u]+[v]$. Signalons sans démonstration un résultat partiel pour l'inclusion inverse. Il porte le nom de théorème des supports.

On appelle enveloppe convexe d'un sous-ensemble $e$ de $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des combinaisons linéaires $\sum_{j=1}^N \lambda_j x^{(j)}$ telles que $\lambda_j \geq 0$ et $x^{(j)} \in e$ pour tout $j$ et $\sum_{j=1}^N \lambda_j = 1$. On la désigne par $\langle e\rangle$.

**Théorème 3.3.4** *Si $u$ et $v$ sont deux distributions à support compact dans $\mathbb{R}^n$, on a*

$$\langle[u*v]\rangle = \langle[u]\rangle + \langle[v]\rangle.$$

[1] C'est possible car $[u]+[v]+b(\epsilon)$ et $[\varphi]$ sont composables.

## 3.4 Support singulier d'une distribution

Soient $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $u$ une distribution dans $\Omega$. Un ouvert $\omega$ inclus dans $\Omega$ est un *ouvert d'infinie (ou d'indéfinie) dérivabilité* de $u$ s'il existe une fonction $f \in C_\infty(\omega)$ telle que

$$u(\varphi) = \int f(x)\varphi(x)\,dx \quad , \quad \varphi \in D(\omega).$$

**Lemme 3.4.1** *Toute union d'ouverts d'infinie dérivabilité d'une distribution $u$ est un ouvert d'infinie dérivabilité de $u$.*

*Preuve.* Soit $\omega$ un ouvert qui est union d'ouverts d'infinie dérivabilité de $u$. Pour tout $\omega_\alpha$ faisant partie de cette union il existe $f_\alpha \in C_\infty(\omega_\alpha)$ telle que $u$ soit la distribution associée à cette fonction, dans $D(\omega_\alpha)$. Cela étant, on définit une fonction $f$ dans $\omega$ par $f = f_\alpha$ dans $\omega_\alpha$. Cette définition a un sens car, pour tout $\varphi \in D(\omega_\alpha \cap \omega_\beta)$, on a

$$u(\varphi) = \int f_\alpha(x)\varphi(x)\ dx = \int f_\beta(x)\varphi(x)\ dx$$

et dès lors $f_\alpha = f_\beta$ dans $\omega_\alpha \cap \omega_\beta$. Par suite, la fonction $f$ appartient aussi à $C_\infty(\omega)$.

Cela étant, montrons que

$$u(\varphi) = \int f(x)\varphi(x)\ dx$$

pour tout $\varphi \in D(\omega)$. On montre tout d'abord, comme dans le lemme 2.4.2, qu'il existe un nombre fini $\omega_1, \ldots, \omega_N$ d'ouverts d'infinie dérivabilité de $u$ et des fonctions $\varphi_j \in D(\omega_j)$, $1 \leq j \leq N$, telles que

$$\varphi = \sum_{j=1}^{N} \varphi_j.$$

Dans $\omega_j$, la distribution $u$ est définie par une fonction $f_j \in C_\infty(\omega_j)$ et on a $f = f_j$ dans $\omega_j$. On a donc

$$u(\varphi) = \sum_{j=1}^{N} u(\varphi_j) = \sum_{j=1}^{N} \int f(x)\varphi_j(x)dx = \int f(x)\varphi(x)dx.$$

D'où la conclusion. □

Le lemme 3.4.1 prouve que toute distribution possède un plus grand ouvert d'infinie dérivabilité.

**Définition 3.4.2** Si $u \in D'(\Omega)$, le *support singulier* de $u$, noté $[u]_s$, est le complémentaire dans $\Omega$ du plus grand ouvert d'infinie dérivabilité de $u$.

Par définition, $[u]_s$ est un fermé de $\Omega$. De plus, $[u]_s \subset [u]$ pour toute distribution $u$.

a) Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, on a

$$[\delta_{x_0}]_s = [\delta_{x_0}] = \{x_0\}.$$

b) Si $u \in D'(\Omega)$ et $L = L(x, D)$ est un opérateur de dérivation à coefficients de classe $C_\infty$ dans $\Omega$, alors

$$[Lu]_s \subset [u]_s.$$

De fait, si $\varphi \in D(\Omega \setminus [u]_s)$, on a

$$(Lu)(\varphi) = u({}^tL\varphi) = \int F(x)^tL(x,D)\varphi(x)dx = \int L(x,D)F(x)\varphi(x)dx$$

avec $F \in C_\infty(\Omega \setminus [u]_s)$.

c) Si $u_1, \ldots, u_p \in D'(\Omega)$ et $c_1, \ldots, c_p \in \mathbb{C}$, on a

$$[\sum_{j=1}^{p} c_j u_j]_s \subset \bigcup_{j=1}^{p} [u_j]_s.$$

Tout ouvert d'infinie dérivabilité simultanée de $u_1, \ldots, u_p$ est en effet un ouvert d'infinie dérivabilité de la combinaison linéaire.

d) Si $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ et $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$[x + u]_s = x + [u]_s.$$

On peut également donner une estimation du support singulier du produit de composition de deux distributions.

**Théorème 3.4.3** *Si $u_1$, $u_2$ sont deux distributions dans $\mathbb{R}^n$ dont l'une est à support compact, on a*

$$[u_1 * u_2]_s \subset [u_1]_s + [u_2]_s.$$

*Preuve.* Supposons $u_1$ à support compact. Il suffit de montrer que $\mathbb{R}^n \setminus ([u_1]_s + [u_2]_s)$ est un ouvert d'infinie dérivabilité de $u_1 * u_2$.

Soit $\omega$ un ouvert d'adhérence compacte de $\mathbb{R}^n$ tel que $\bar{\omega} \cap ([u_1]_s + [u_2]_s) = \emptyset$. Le compact $[u_1]_s$ et le fermé $\bar{\omega} - [u_2]_s$ sont alors disjoints. Soit alors une fonction $\psi \in D(\mathbb{R}^n)$ égale à 1 dans un voisinage de $[u_1]_s$ et nulle au voisinage de $\bar{\omega} - [u_2]_s$. Pour tout $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$, on a

$$(u_1 * u_2)(\varphi) = u_{1(x)}(\psi(x)u_{2(y)}(\varphi(x+y))) + u_{1(x)}((1-\psi(x))u_{2(y)}(\varphi(x+y))).$$

Si $x \in [\psi]$, on a

$$[\varphi(x + \cdot)] \cap [u_2]_s = ([\varphi] - x) \cap [u_2]_s \subset ([\varphi] - [\psi]) \cap [u_2]_s = \emptyset$$

car $[\psi] \cap ([\varphi] - [u_2]_s) = \emptyset$ par construction de $\psi$. Le premier terme s'écrit donc

$$u_{1(x)}\left(\psi(x) \int f_2(y)\varphi(x+y)dy\right)$$

où $f_2$ est une fonction de classe $C_\infty$ dans $\mathbb{R}^n \setminus [u_2]_s$. La fonction $(x,y) \to \psi(x)f_2(y)\varphi(x+y)$ prolongée par 0 si $y \notin [\varphi] - [\psi]$ est de classe $C_\infty$ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. En vertu du théorème 2.5.2, le premier terme de la décomposition de $(u_1 * u_2)(\varphi)$ s'écrit encore

$$u_{1(x)}\left(\psi(x)\int f_2(y-x)\varphi(y)dy\right) = \int \varphi(y)u_{1(x)}(\psi(x)f_2(y-x))dy.$$

La fonction $(x,y) \to \psi(x)f_2(y-x)$ prolongée par 0 si $x \notin [\psi]$ est de classe $C_\infty$ dans $\mathbb{R}^n \times \omega$. Par le théorème 2.5.1, la fonction

$$y \to u_{1(x)}(\psi(x)f_2(y-x))$$

est de classe $C_\infty$ dans $\omega$.

Puisque la fonction $\psi$ est égale à 1 au voisinage du support singulier de $u_1$, le second terme s'écrit

$$\begin{aligned}\int f_1(x)\,(1-\psi(x))\,u_{2(y)}(\varphi(x+y))dx &= u_{2(y)}\left(\int f_1(x)(1-\psi(x))\varphi(x+y)dx\right)\\ &= u_{2(y)}\left(\int f_1(x-y)(1-\psi(x-y))\varphi(x)dx\right)\\ &= \int \varphi(x)u_{2(y)}(f_1(x-y)(1-\psi(x-y)))dx\end{aligned}$$

en vertu du théorème 2.5.2. Par le théorème 2.5.1, la fonction

$$x \to u_{2(y)}(f_1(x-y)(1-\psi(x-y)))$$

est de classe $C_\infty$ dans $\mathbb{R}^n$. Ceci prouve que $\omega$ est un ouvert d'infinie dérivabilité de $u_1 * u_2$.
□

# Chapitre 4

# Distributions tempérées

Comme pour les fonctions, la transformée de Fourier d'une distribution ne peut être définie que sous certaines conditions. Il est naturel de remplacer l'espace des fonctions test $D(\mathbb{R}^n)$ par $S(\mathbb{R}^n)$. Ce dernier est en effet stable pour la transformation de Fourier alors que $D(\mathbb{R}^n)$ ne l'est pas.

## 4.1 Fonctions à décroissance rapide

La transformée de Fourier d'un élément non nul de $D(\mathbb{R}^n)$ n'appartient jamais à $D(\mathbb{R}^n)$. De manière à améliorer le comportement des fonctions test pour cette transformation, nous considérons un ensemble plus grand.

**Définition 4.1.1** *On désigne par $S(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions $f$ de classe $C_\infty$ dans $\mathbb{R}^n$ telles que*

$$p_{k,N}(f) = \sup_{|\alpha|\le k} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|)^N |D^\alpha f(x)|$$

*soit fini pour tous $k, N$. Une telle fonction est dite à décroissance rapide.*

On a $D(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n)$. La fonction $f(x) = \exp(-|x|^2)$ est à décroissance rapide.

Par définition, $S(\mathbb{R}^n)$ est un espace vectoriel. Le produit de deux fonctions à décroissance rapide est à décroissance rapide.

Les fonctions à décroissance rapide sont bornées, intégrables et de carré intégrable dans $\mathbb{R}^n$.

On dit qu'une suite $f_m$ d'éléments de $S(\mathbb{R}^n)$ *converge* dans $S(\mathbb{R}^n)$ vers une fonction $f \in S(\mathbb{R}^n)$ si $p_{k,N}(f - f_m)$ converge vers 0 pour tous $k, N$. Une suite $f_m$ d'éléments de $S(\mathbb{R}^n)$ *est de Cauchy* dans $S(\mathbb{R}^n)$ si $p_{k,N}(f_r - f_s)$ converge vers 0 lorsque $r$ et $s$ tendent vers $+\infty$ pour tous $k, N$.

**Proposition 4.1.2** *Toute suite de Cauchy dans $S(\mathbb{R}^n)$ converge. Tout élément de $S(\mathbb{R}^n)$ est la limite dans $S(\mathbb{R}^n)$ d'une suite d'éléments de $D(\mathbb{R}^n)$.*

*Preuve.* Si $f_m$ est une suite de Cauchy dans $S(\mathbb{R}^n)$, toutes les dérivées termes à termes de la suite $f_m$ sont de Cauchy pour la convergence uniforme dans $\mathbb{R}^n$. La suite $f_m$ converge donc uniformément vers une fonction $f \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$. Fixons $N$ et $k$ et choisissons $\epsilon > 0$. Si $r$ et $s$ sont assez grands et $|\alpha| \leq k$, on a

$$(1+|x|)^N |D^\alpha f_r(x) - D^\alpha f_s(x)| \leq p_{k,N}(f_r - f_s) \leq \epsilon$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. De là,

$$(1+|x|)^N |D^\alpha f(x) - D^\alpha f_s(x)| \leq \epsilon$$

si $s$ est assez grand et $|\alpha| \leq k$. Ceci montre que $f \in S(\mathbb{R}^n)$ et que la suite $f_m$ converge vers $f$ dans $S(\mathbb{R}^n)$.

Prouvons la seconde partie de l'énoncé. Soit $f \in S(\mathbb{R}^n)$ et $\chi \in D(\mathbb{R}^n)$ une fonction égale à 1 dans la boule unité. Les fonctions $f_m(x) = \chi(x/m)f(x)$ appartiennent à $D(\mathbb{R}^n)$. Montrons que la suite $f_m$ converge vers $f$ dans $S(\mathbb{R}^n)$. Pour tout entier $N$ et tout multi-indice $\alpha$, on a

$$D^\alpha(f - f_m)(x) = (1 - \chi(x/m))D^\alpha f(x) - \sum_{\beta \leq \alpha,\ \beta \neq 0} C_\alpha^\beta m^{-|\beta|}) D^\beta \chi)(x/m) D^{\alpha-\beta} f(x).$$

Cette expression est nulle si $|x| < m$. Il existe donc une constante $C$ telle que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1+|x|)^N |D^\alpha(f - f_m)(x)| \leq \frac{C}{m} \sup_{|\beta| \leq |\alpha|} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1+|x|)^{N+1} |D^\beta f(x)|.$$

Ceci démontre la proposition. □

Rappelons que la transformée de Fourier (+,-) d'une fonction $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ est définie par

$$\mathcal{F}^\pm f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i x.\xi} f(x) dx.$$

On sait que les fonctions $\mathcal{F}^\pm f$ sont uniformément continues dans $\mathbb{R}^n$, convergent vers 0 à l'infini et que $\|\mathcal{F}^\pm f\|_\infty \leq \|f\|_1$.

Si $f \in L_1 \cap L_2$ alors $\|\mathcal{F}^\pm f\|_2 = (2\pi)^{n/2} \|f\|_2$. Si $f \in L_2$ et $f_m$ est une suite de fonctions de $L_1 \cap L_2$ qui convergent dans $L_2$ vers $f$, la suite $\mathcal{F}^\pm f_m$ converge dans $L_2$ et sa limite est indépendante de la suite $f_m$ choisie. On pose

$$\mathcal{F}^\pm f = \lim_{m \to +\infty} \mathcal{F}^\pm f_m.$$

L'égalité $\|\mathcal{F}^\pm f\|_2 = (2\pi)^{n/2} \|f\|_2$ reste valable pour tout $f \in L_2$.

**Proposition 4.1.3** *Si $f \in S(\mathbb{R}^n)$ alors $\mathcal{F}^\pm f \in S(\mathbb{R}^n)$. De plus, pour tous entiers $k, N$, il existe des entiers $k', N'$ et une constante $C > 0$ tels que*

$$p_{k,N}(\mathcal{F}^\pm f) \leq C p_{k',N'}(f), \quad f \in S(\mathbb{R}^n).$$

*En particulier, si une suite $f_m$ converge dans $S(\mathbb{R}^n)$ vers $f$, alors $\mathcal{F}^\pm f_m$ converge dans $S(\mathbb{R}^n)$ vers $\mathcal{F}^\pm f$.*

*Preuve.* Pour tout entier $N$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on a

$$(1+|\xi|)^N |D_\xi^\alpha (\mathcal{F}^\pm f)(\xi)| = (1+|\xi|)^N |\int e^{\pm ix.\xi} (\pm ix)^\alpha f(x) dx|$$

$$\leq 2^N (1+|\xi|^2)^N |\int e^{\pm ix.\xi} x^\alpha f(x) dx| \leq 2^N |\int e^{\pm ix.\xi} (1-\Delta)^N (x^\alpha f(x) dx)|$$

$$\leq C \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{n+1} |(1-\Delta)^N (x^\alpha f(x))| \leq C' p_{2N,\, n+1+|\alpha|}(f)$$

donc $p_{k,N}(\mathcal{F}^\pm f) \leq C' p_{2N,\, n+1+k}(f)$. □

## 4.2 Distributions tempérées et transformation de Fourier

**Définition 4.2.1** Une distribution $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ est dite *tempérée* s'il existe une constante $C$ et des entiers $k, N$ tels que $|u(\varphi)| \leq C p_{k,N}(\varphi)$ pour tout $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$. On désigne par $S'(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des distributions tempérées.

Si une fonctionnelle linéaire sur $D(\Omega)$ vérifie une estimation de type ci-dessus, c'est bien sûr une distribution tempérée.

*Toute distribution à support compact est tempérée. Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ et s'il existe un entier $k$ tel que $(1+|x|)^{-k} f(x)$ soit intégrable, la distribution $u_f$ est tempérée.*

Soit $u$ une distribution tempérée. Si $f \in S(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi_m$ est une suite d'éléments de $D(\mathbb{R}^n)$ qui convergent vers $f$ dans $S(\mathbb{R}^n)$, alors

$$|u(\varphi_r) - u(\varphi_s)| = |u(\varphi_r - \varphi_s)| \leq C p_{k,N}(\varphi_r - \varphi_s)$$

converge vers 0 lorsque $r$ et $s$ tendent vers $+\infty$. La suite $u(\varphi_m)$ converge donc vers une limite qui est encore notée $u(f)$.

Cette limite est indépendante de la suite $\varphi_m$ choisie. De plus, si $|u(\varphi)| \leq C p_{k,N}(\varphi)$ pour tout $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$, on a aussi $|u(f)| \leq C p_{k,N}(f)$ pour tout $f \in S(\mathbb{R}^n)$.

Ce qui précède montre que *toute distribution tempérée s'étend en une fonctionnelle linéaire continue sur $S(\mathbb{R}^n)$.*

Si $u$ est une distribution tempérée, la distribution $\mathcal{F}^\pm u$ définie par

$$(\mathcal{F}^\pm u)(\varphi) = u(\mathcal{F}^\pm \varphi)\ , \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^n),$$

est tempérée en vertu de la proposition 4.1.3. On a $(\mathcal{F}^\pm u)(f) = u(\mathcal{F}^\pm f)$ pour tout $f \in S(\mathbb{R}^n)$. On dit que $\mathcal{F}^\pm u$ est la *transformée de Fourier* de $u$. Pour toute distribution tempérée $u$, on a

$$\mathcal{F}^\mp \mathcal{F}^\pm u = (2\pi)^n u.$$

Donnons quelques exemples.

**Exemple 4.2.2** *La transformée de Fourier de la distribution de Dirac en 0 est la distribution de la fonction 1. Plus généralement, si $x_0 \in \mathbb{R}^n$, la transformée de Fourier de $\delta_{x_0}$ est*

$$(\mathcal{F}^{\pm}\delta_{x_0})(f) = \delta_{x_0}\Big(\int e^{\pm ix.\xi} f(\xi)d\xi\Big) = \int e^{\pm ix_0.\xi} f(\xi)d\xi.$$

Ainsi, il résulte de la formule d'inversion de Fourier que la transformée de Fourier de la fonction 1 est $(2\pi)^n\delta_0$.

**Exemple 4.2.3** *Si $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ou $L_2(\mathbb{R}^n)$, alors $\mathcal{F}^{\pm}u_f = u_{\mathcal{F}^{\pm}f}$.*

**Exemple 4.2.4** *Si $u$ est une distribution à support compact, on a*

$$(\mathcal{F}^{\pm}u)(f) = \int f(\xi)u_{(x)}(e^{\pm ix.\xi})d\xi\ , \quad f \in S(\mathbb{R}^n).$$

C'est une conséquence immédiate du théorème 2.5.5

La transformée de Fourier d'une distribution à support compact s'identifie donc toujours à une fonction de classe $C_\infty$. On utilise généralement les notations

$$\widehat{u}\ :\ \xi \mapsto \widehat{u}(\xi) = u_{(x)}(e^{-ix.\xi}), \quad \breve{u}\ :\ \xi \mapsto \breve{u}(\xi) = u_{(x)}(e^{ix.\xi}).$$

Ces fonctions s'étendent à des fonctions entières qui possèdent un comportement particulier (cf le théorème de Paley-Wiener).

**Exemple 4.2.5** *On a*

$$(\mathcal{F}^{\pm}Y)(\varphi) = \pi\varphi(0) \pm i\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,dx.$$

*En particulier, la transformée de Fourier positive $\mathcal{F}^+$ de $\mathrm{pf}(\frac{1}{x})$ est la fonction $i\pi\,\mathrm{sgn}\,\xi$.*

De fait,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}^{\pm}Y)(\varphi) &= \int_0^{+\infty}(\mathcal{F}^{\pm}\varphi)(\xi)d\xi = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(1+\mathrm{sgn}\,\xi)(\mathcal{F}^{\pm}\varphi)(\xi)d\xi \\
&= \pi\varphi(0) + \frac{1}{2}\lim_{N\to+\infty}\int_{-N}^{+N}\mathrm{sgn}\,\xi d\xi\int\varphi(x)e^{\pm ix.\xi}dx \\
&= \pi\varphi(0) + \frac{1}{2}\lim_{N\to+\infty}\int\varphi(x)dx\int_{-N}^{+N}\mathrm{sgn}\,\xi e^{\pm ix.\xi}d\xi \\
&= \pi\varphi(0) \pm i\lim_{N\to+\infty}\int\varphi(x)\frac{1-\cos(Nx)}{x}\,dx \\
&= \pi\varphi(0) \pm i\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,(1-\cos(Nx))dx \\
&= \pi\varphi(0) \pm i\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,dx
\end{aligned}$$

en vertu du théorème de Riemann-Lebesgue.

**Exemple 4.2.6** *Si* $0 < \alpha < n$ *et*

$$T_\alpha(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(x)}{|x|^\alpha}\, dx \ , \quad \varphi \in S(\mathbb{R}^n),$$

*alors*

$$\mathcal{F}^\pm T_\alpha = \frac{2^{n-\alpha}\pi^{n/2}\Gamma((n-\alpha)/2)}{\Gamma(\alpha/2)}\, T_{n-\alpha}.$$

On a

$$(\mathcal{F}^\pm T_\alpha)(\varphi) = \lim_{\epsilon\to 0+} \int \frac{e^{-\epsilon|x|^2}}{|x|^\alpha}\, dx \int e^{\pm ix.\xi}\varphi(\xi)d\xi = \lim_{\epsilon\to 0+} \int \varphi(\xi)d\xi \int e^{\pm ix.\xi}\frac{e^{-\epsilon|x|^2}}{|x|^\alpha}\, dx.$$

Pour tout $\epsilon > 0$, il vient

$$\begin{aligned}
\int e^{\pm ix.\xi}\frac{e^{-\epsilon|x|^2}}{|x|^\alpha}\, dx &= \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int e^{\pm ix.\xi - \epsilon|x|^2} dx \int_0^{+\infty} e^{-t|x|^2} t^{\alpha/2-1} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha/2-1} dt \int e^{\pm ix.\xi - (\epsilon+t)|x|^2} dx \\
&= \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\alpha/2)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha/2-1}}{(\epsilon+t)^{n/2}}\, e^{-|\xi|^2/4(\epsilon+t)} dt.
\end{aligned}$$

Si $\alpha - n < \delta < \alpha$, on a

$$\begin{aligned}
|\varphi(\xi)| \frac{t^{\alpha/2-1}}{(\epsilon+t)^{n/2}}\, e^{-|\xi|^2/4(\epsilon+t)} &= \frac{t^{\alpha/2-1}}{(\epsilon+t)^{(\alpha-\delta)/2}} \frac{|\varphi(\xi)|}{|\xi|^{n-\alpha+\delta}} \left(\frac{|\xi|^2}{\epsilon+t}\right)^{\frac{n-\alpha+\delta}{2}} e^{-|\xi|^2/4(\epsilon+t)} \\
&\leq C_\delta\, t^{\delta/2-1}\, \frac{|\varphi(\xi)|}{|\xi|^{n-\alpha+\delta}}.
\end{aligned}$$

Si $t \in ]0,1[$, on prend $0 < \delta < \alpha$. Si $t > 1$, on prend $\alpha - n < \delta < 0$. Le premier membre est donc majoré par une fonction intégrable dans $\mathbb{R}^n \times ]0, +\infty[$ indépendante de $\epsilon$. Par le théorème de Lebesgue, on obtient

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}^\pm T_\alpha)(\varphi) &= \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\alpha/2)} \int \varphi(\xi)d\xi \int_0^{+\infty} t^{\alpha/2-1-n/2} e^{-|\xi|^2/4t} dt \\
&= \frac{2^{n-\alpha}\pi^{n/2}\Gamma((n-\alpha)/2)}{\Gamma(\alpha/2)} \int \frac{\varphi(\xi)}{|\xi|^{n-\alpha}}\, d\xi.
\end{aligned}$$

A titre d'exercice, on pourra vérifier les transformées de Fourier suivantes.

- Si $0 < \alpha < 1$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathcal{F}^\pm\varphi(\xi)}{\xi^{1-\alpha}}\, d\xi = e^{\pm i\pi\alpha/2}\Gamma(\alpha) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^\alpha}\, dx$$

  avec $\arg(x) = 0$ ou $\pm\pi$.

- Si $A$ est une matrice symétrique réelle, $\det(A) \neq 0$ et

$$T_A(\varphi) = \int e^{i\langle Ax,x\rangle/2}\varphi(x)dx\ , \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^n),$$

alors

$$\mathcal{F}^{\pm}T_A = \frac{(2\pi)^{n/2}e^{i\pi\ \mathrm{sgn}\, A/4}}{|\det(A)|^{1/2}}\, T_{-A^{-1}}.$$

## 4.3 Distributions périodiques

Dans cette section nous n'envisagerons que le cas $n = 1$, pour alléger les notations.

**Définition 4.3.1** *Soit $a > 0$. Une distribution $u$ dans $\mathbb{R}$ est dite périodique de période $a$ (ou $a$-périodique) si*

$$u(\varphi(. + a)) = u(\varphi), \quad \forall\varphi \in D(\mathbb{R}).$$

Si $u$ est périodique de période $a$, on obtient immédiatement que $u(\varphi(. + na)) = u(\varphi)$ pour tout $\varphi \in D(\mathbb{R})$.

L'objectif de cette section est de montrer que toute distribution périodique est tempérée.

**Propriété 4.3.2** *Soient $u$ une distribution dans $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_0$ et $\varphi_0 \in D(\mathbb{R})$. Si, pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on pose*

$$c_m = u_{(x)}\left(\varphi_0(x)e^{\frac{2i\pi mx}{a}}\right),$$

*alors il existe une constante $C > 0$ et un naturel $N$ tels que*

$$|c_m| \leq C\ (1 + |m|)^N, \quad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

*Preuve.* Comme $v = \varphi_0 u$ est une distribution à support compact, il existe des constantes $c > 0, k \in \mathbb{N}$ telles que

$$|v(f)| \leq C \sup_{x\in[\varphi_0],0\leq\alpha\leq k} |D^\alpha f(x)|, \quad \forall f \in C_\infty(\mathbb{R}).$$

Dès lors on obtient

$$|c_m| = \left|v_{(x)}\left(e^{\frac{2i\pi mx}{a}}\right)\right| \leq C \sup_{x\in[\varphi_0],0\leq\alpha\leq k} |D^\alpha e^{\frac{2i\pi mx}{a}}(x)| \leq C_0(1+|m|^k) \leq C_1(1+|m|)^k, \quad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

□

**Proposition 4.3.3** *Si $u$ est une distribution $a$-périodique, alors il existe une suite unique de complexes $c_m$ ($m \in \mathbb{Z}$) telle que*

$$u(\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m \int e^{-\frac{2i\pi mx}{a}}\varphi(x)\ dx$$

*pour tout* $\varphi \in D(\mathbb{R})$.

*De plus, si* $\varphi_0 \in D(\mathbb{R})$ *est tel que* $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi_0(x-ak) = 1$ *pour tout réel* $x$*, alors*

$$c_m = \frac{1}{a} u_{(x)} \left( \varphi_0(x) e^{\frac{2i\pi m x}{a}} \right), \quad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

*Preuve.* Prouvons l'unicité: supposons que

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m \int e^{-\frac{2i\pi m x}{a}} \varphi(x)\, dx = 0$$

pour tout $\varphi \in D(\mathbb{R})$ et montrons que $c_m = 0$ pour tout $m$.

De fait, soit une fonction $\varphi_0 \in D(\mathbb{R})$ telle que $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi_0(x-ak) = 1$ pour tout réel $x$ et soit $M \in \mathbb{Z}$. Posons $\varphi(x) = \varphi_0(x) e^{\frac{2i\pi M x}{a}}$. On obtient

$$\int e^{-\frac{2i\pi m x}{a}} \varphi(x)\, dx = \int_0^a e^{-\frac{2i\pi m x}{a}} e^{\frac{2i\pi M x}{a}} = \begin{cases} a & \text{si } m = M \\ 0 & \text{si } m \neq M. \end{cases}$$

Dès lors

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m \int e^{-\frac{2i\pi m x}{a}} \varphi(x)\, dx = a c_M = 0,$$

d'où la conclusion.

Montrons à présent que les coefficients

$$c_m = \frac{1}{a} u_{(x)} \left( \varphi_0(x) e^{\frac{2i\pi m x}{a}} \right), \quad m \in \mathbb{Z}$$

où $\varphi_0 \in D(\mathbb{R})$ est tel que $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi_0(x-ak) = 1$ pour tout réel $x$, conviennent.

De fait, soit $\varphi \in D(\mathbb{R})$. Comme on a

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi_0(. - ak)\varphi \to \varphi \quad \text{dans } D(\mathbb{R})$$

on obtient déjà

$$u(\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(\varphi_0(. - ak)\varphi).$$

En se servant de la périodicité de $u$, on obtient ensuite

$$u(\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(\varphi_0 \varphi(. + ak))$$

puis, de la même manière que ci-dessus,

$$u(\varphi) = u(\varphi_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(. + ak)).$$

Posons

$$\Phi = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(. + ak).$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $a$; son développement en série trigonométrique de Fourier dans $L_2(]0,a[)$ est donc

$$\Phi(x) = \frac{1}{a}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^a e^{\frac{2i\pi lt}{a}}\Phi(t)dt\right)\, e^{-\frac{2i\pi lx}{a}} = \frac{1}{a}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\left(\int e^{\frac{2i\pi lt}{a}}\varphi(t)dt\right)\, e^{\frac{-2i\pi lx}{a}}.$$

Cela étant, comme

$$\frac{1}{a}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\left(\int e^{\frac{2i\pi lt}{a}}\varphi(t)dt\right)\, e^{\frac{-2i\pi l.}{a}}\ \varphi_0 \ \to\ \varphi_0\Phi \quad \text{dans} \quad D(\mathbb{R})$$

on obtient

$$u(\varphi) = u(\varphi_0\Phi) = \frac{1}{a}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\left(\int e^{\frac{2i\pi lt}{a}}\varphi(t)dt\right)\ u\left(e^{\frac{-2i\pi l.}{a}}\ \varphi_0\right)$$

et on conclut.□

On arrive donc au résultat annoncé au début de cette section, lequel n'est qu'un corollaire des résultats précédents.

**Théorème 4.3.4** *Toute distribution périodique est tempérée.*

*Preuve.* Soit $u$ une distribution $a$-périodique. Vu les deux résultats précédents, il existe des coefficients $c_m$ ($m \in \mathbb{Z}$) et des constantes $C > 0, N \in \mathbb{N}$ tels que

$$|c_m| \leq C(1+|m|)^N, \quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad u(\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m \int e^{-\frac{2i\pi mx}{a}}\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}).$$

Il s'ensuit successivement

$$\begin{aligned}
|u(\varphi)| &\leq C \sum_{m=-\infty}^{+\infty}(1+|m|)^N \left|\int e^{-\frac{2i\pi mx}{a}}\varphi(x)dx\right| \\
&= C \sum_{m=-\infty}^{+\infty}(1+|m|)^{N+2} \left|\int e^{-\frac{2i\pi mx}{a}}\varphi(x)dx\right| \frac{1}{(1+|m|)^2} \\
&\leq C \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left|\int e^{-\frac{2i\pi mx}{a}}(1-\frac{a^2}{4\pi^2}D^2)^{N+2}\varphi(x)dx\right| \frac{1}{(1+|m|)^2} \\
&\leq C' \int \left|(1-\frac{a^2}{4\pi^2}D^2)^{N+2}\varphi(x)\right| dx \\
&\leq C' \int \frac{1+|x|^2}{1+|x|^2}\left|(1-\frac{a^2}{4\pi^2}D^2)^{N+2}\varphi(x)\right| dx \\
&\leq C" \sup_{x\in\mathbb{R}, 0\leq\alpha\leq 2N+4} |(1+|x|)^2 D^\alpha\varphi(x)|.
\end{aligned}$$

D'où la conclusion.□

## 4.4 Le théorème de Paley-Wiener (cas $n = 1$)

Notation: $\widehat{u}$ pour la transformée de Fourier négative (d'une fonction, d'une distribution tempérée).

**Introduction**

**Propriété 4.4.1** *Si $f$ est localement intégrable et à support compact alors sa transformée de Fourier s'étend à une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$ et il existe $C > 0$ tel que*

$$|\widehat{f}(z)| \leq C\ e^{A|\Im z|},\ \forall z \in \mathbb{C}$$

*où $A > 0$ est tel que $[f] \subset [-A, A]$.*

Cette propriété s'étend au cas des distributions à support compact et la réciproque est vraie. Ce (double) résultat s'appelle le théorème de Paley-Wiener.

Pour rappel, si $u$ est une distribution dans $\mathbb{R}$ à support compact, c'est une distribution tempérée dont la transformée de Fourier $\widehat{u}$ est la distribution tempérée associée à la fonction $y \mapsto u_{(x)}(e^{-ixy})$. Cette fonction se prolonge en une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$. Par abus de langage et de notation, on dit et écrit que le prolongement holomorphe de la transformée de Fourier de $u$ est la fonction $\widehat{u}(z) = u_{(x)}(e^{-ixz})$.

**Théorème 4.4.2 (Paley-Wiener I)** *Si $u$ est une distribution dans $\mathbb{R}$ dont le support est inclus dans $[-A, A]$ alors il existe $C, N > 0$ tels que*

$$|\widehat{u}(z)| \leq C\ (1 + |z|)^N\ e^{A|\Im z|},\ \forall z \in \mathbb{C}.$$

*Preuve.* Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction qui vaut 1 au voisinage de $[-A, A]$ et dont le support est inclus dans $[-A - \delta, A + \delta]$ (où $\delta > 0$). La majoration de continuité de $u$ donne alors l'existence de $C > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que

$$|u(f)| = |u(f\psi)| \leq C \sup_{|x| \leq A+\delta,\ \alpha \leq k} |D_x^\alpha(\chi f(x))| \leq C' \sup_{|x| \leq A+\delta,\ \alpha \leq k} |D_x^\alpha f(x)|, \quad \forall f \in C_\infty(\mathbb{R})$$

où $C'$ est $C$ multiplié par une autre constante strictement positive qui ne dépend que de $k$ et de $\chi$.

Soit alors $z \in \mathbb{C}$. Par l'inégalité précédente, on obtient

$$|u_{(x)}(e^{-ixz})| \leq C' \sup_{|x| \leq A+\delta,\ \alpha \leq k} |D_x^\alpha e^{-ixz}| \leq C'(1+|z|)^k \sup_{|x| \leq A+\delta} |e^{-ixz}| \leq C'(1+|z|)^k e^{(A+\delta)|\Im z|}.$$

Pour $z$ de partie imaginaire nulle, on a donc l'inégalité annoncée:

$$|\widehat{u}(z)| = |u_{(x)}(e^{-ixz})| \leq C'(1 + |z|)^k e^{(A+\delta)|\Im z|} = C'(1 + |z|)^k e^{A|\Im z|}.$$

Si la partie imaginaire de $z$ n'est pas nulle, on procède comme suit. On pose $\varepsilon = 1/|\Im z|$ et on prend une fonction $\psi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, égale à 1 au voisinage de $[-A, A]$, dont le support est inclus dans $[-A-\varepsilon, A+\varepsilon]$ et telle que

$$|D^\alpha \psi_\varepsilon| \leq C_0 \varepsilon^{-\alpha}, \quad \forall \alpha \leq k.$$

On obtient

$$\begin{aligned}
|u_{(x)}(e^{-ixz})| = |u_{(x)}(\psi_\varepsilon(x) e^{-ixz})| &\leq C' \sup_{|x|\leq A+\varepsilon,\ \alpha\leq k} |D_x^\alpha \left(\psi_\varepsilon(x) e^{-ixz}\right)| \\
&\leq C' C_0 \sup_{|x|\leq A+\varepsilon,\ \alpha\leq k} \sum_{j=0}^{\alpha} C_\alpha^j \varepsilon^{-j} |z|^{\alpha-j} e^{x\Im z} \\
&\leq C' C_0 2^k \ (1+|z|)^k \ e^{(A+\varepsilon)|\Im z|} \\
&= C' C_0 2^k e \ (1+|z|)^k \ e^{A|\Im z|}.
\end{aligned}$$

D'où la conclusion. □

**Lemme 4.4.3** *Soit $f$ une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$. Supposons qu'il existe $A > 0$ tel que, $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists C_N > 0$ tel que*

$$|f(z)| \leq C_N \ (1+|z|)^{-N} \ e^{A|\Im z|}, \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

*Alors il existe $\varphi \in D([-A, A])$ tel que*

$$\widehat{\varphi}(\xi) = f(\xi), \ \forall \xi \in \mathbb{R}$$

*(et même dans $\mathbb{C}$).*

*Preuve.* La restriction à $\mathbb{R}$ de $f$ est une fonction intégrable. Pour conclure, il suffit dès lors de montrer que $\mathcal{F}^+ f$ appartient à $\mathcal{D}([-A, A])$.

Comme on a

$$|f(x)| \leq \frac{C_N}{(1+|x|)^N}, \ x \in \mathbb{R}$$

pour tout $N \in \mathbb{N}$, la transformée de Fourier de $f$ est indéfiniment continûment dérivable dans $\mathbb{R}$.

Fixons $y \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$. On a successivement

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_y^+ f &= \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} e^{ixy} f(x) \ dx \\
&= \lim_{R\to+\infty} \left( -\int_{V_{R,\delta}} f(z) e^{iyz} \ dz \ + \int_{V'_{R,\delta}} f(z) e^{iyz} \ dz \ + \int_{D_{R,\delta}} f(z) e^{iyz} \ dz \right) \\
&= \lim_{R\to+\infty} \int_{D_{R,\delta}} f(z) e^{iyz} \ dz = \int_{\mathbb{R}} f(t+i\delta) e^{iy(t+i\delta)} \ dt
\end{aligned}$$

où $V_{R,\delta}$ est le chemin $t \in [0, \delta] \mapsto R + it$, où $V'_{R,\delta}$ est le chemin $t \in [0, \delta] \mapsto -R + it$ et où $D_{R,\delta}$ est le chemin $t \in [-R, R] \mapsto t + i\delta$. On obtient donc

$$\left|\mathcal{F}_y^+ f\right| \leq C_N e^{-y\delta} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|t|)^N} \; e^{A\delta} \; dt \leq C'_N e^{\delta(A-y)}.$$

Dès lors, si $A - y < 0$, on obtient $\lim_{\delta\to+\infty} e^{\delta(A-y)} = 0$ donc

$$\mathcal{F}_y^+ f = 0, \; \forall y > A.$$

On procède de manière analogue pour obtenir

$$\mathcal{F}_y^+ f = 0, \; \forall y < -A.$$

□

**Théorème 4.4.4 (Paley-Wiener II)** *Soit $f$ une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$. Supposons qu'il existe $A > 0$, $C > 0$, $N \in \mathbb{N}$ tels que*

$$|f(z)| \leq C \; (1 + |z|)^N \; e^{A|\Im z|}, \; \forall z \in \mathbb{C}.$$

*Alors il existe une distribution $u$ à support compact inclus dans $[-A, A]$ telle que*

$$f(z) = \widehat{u}(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

*Preuve.* Vu les hypothèses sur $f$, cette fonction définit une distribution tempérée. Par abus de langage, notons $\widehat{f}$ la transformée de Fourier de cette distribution. Pour conclure, nous allons montrer que celle-ci est à support compact inclus dans $[-A, A]$.

Soit $\psi \in \mathcal{D}([-1, 1])$ d'intégrale égale à 1; posons $\psi_m(x) = m\psi(mx)$. On sait que $\psi_m * \varphi \to \varphi$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Par un calcul direct, on montre que pour tout naturel $M$, il existe une constante $C_{M,m}$ telle que

$$\left|\mathcal{F}_z^+ \psi_m\right| \leq \frac{C_{M,m}}{(1+|z|)^M} e^{|\Im z|/m}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Dès lors, pour tout $m$ et tout $M \in \mathbb{N}$, il existe des constantes $C_{M,m} > 0$ telles que

$$\left|f(z)\mathcal{F}_z^+ \psi_m\right| \leq \frac{C_{M,m}}{(1+|z|)^M} e^{(A+\frac{1}{m})|\Im z|}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Le lemme précédent fournit alors

$$\varphi_m \in \mathcal{D}([-A - \frac{1}{m}, A + \frac{1}{m}]) \;\text{ tel que } \mathcal{F}^+\varphi_m = f\mathcal{F}^+\psi_m$$

pour tout $m$.

La suite de fonctions $2\pi\varphi_m = \widehat{f} * \psi_m$ ($m \in \mathbb{N}$) converge au sens distributions vers la distribution $\widehat{f}$. Comme le support de $\varphi_m$ est inclus dans $[-A - \frac{1}{m}, A + \frac{1}{m}]$, on en déduit aussi directement que le suppport de $\widehat{f}$ est inclus dans $[-A, A]$.□

# Chapitre 5

# Equations aux dérivées partielles

L'objet de ce chapitre est de mettre en oeuvre les outils des chapitres précédents dans des problèmes d'équations aux dérivées partielles.

Nous construisons des solutions élémentaires de l'opérateur de Laplace, de l'opérateur des ondes et de l'opérateur de la chaleur. La transformée de Fourier des distributions tempérées s'y avère un outil essentiel. Ces solutions élémentaires sont utilisées pour résoudre quelques problèmes aux limites typiques des opérateurs considérés.

## 5.1 Solution élémentaire

Soit

$$P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$$

un opérateur de dérivation d'ordre $m$ à coefficients constants dans $\mathbb{R}^n$.

**Définition 5.1.1** *Une distribution $E \in D'(\mathbb{R}^n)$ est une solution élémentaire de $P(D)$ si*

$$P(D)E = \delta_0.$$

L'importance d'une solution élémentaire provient en bonne partie du fait qu'elle fournit un "inverse bilatère" de l'opérateur dans l'espace des distributions à support compact. Si $E$ est une solution élémentaire de $P(D)$, on a

$$P(D)(E * u) = u \quad , \quad E * P(D)u = u$$

pour toute distribution à support compact $u$.

Donnons quelques exemples.

**Exemple 5.1.2** *Dans $\mathbb{R}$, une solution élémentaire de $D_x$ est donnée par la distribution d'Heaviside*

$$Y(\varphi) = \int_0^{+\infty} \varphi(x)\, dx.$$

C'est immédiat.

**Exemple 5.1.3** *Dans $\mathbb{C}$, une solution élémentaire de l'opérateur de Cauchy-Riemann $D_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(D_x + iD_y)$ est définie par la fonction localement intégrable $1/\pi z$.*

De fait, en coordonnées polaires $z = re^{i\theta}$, on a

$$D_{\overline{z}} = \frac{e^{i\theta}}{2}(D_r + \frac{i}{r}D_\theta).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{-D_{\overline{z}}\varphi(z)}{z}\, d\lambda(z) &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} dr \int_0^{2\pi} (D_r + \frac{i}{r}D_\theta)\varphi(re^{i\theta})\, d\theta \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} D_r(\varphi(re^{i\theta}))\, dr = \varphi(0).\end{aligned}$$

**Exemple 5.1.4** *Dans $\mathbb{R}^n$, une solution élémentaire de l'opérateur $-\Delta$ est définie par la fonction localement intégrable*

- $-\dfrac{1}{2}|x|$ *si* $n = 1$,
- $-\dfrac{1}{2\pi}\ln|x|$ *si* $n = 2$,
- $\dfrac{1}{4\pi|x|}$ *si* $n = 3$,
- $\dfrac{\Gamma(n/2-1)}{4\pi^{n/2}|x|^{n-2}}$.

De fait, pour $n = 1$, on a

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} |x|D^2\varphi(x)\, dx &= \int_0^{+\infty} xD^2\varphi(x)\, dx - \int_{-\infty}^0 xD^2\varphi(x)\, dx \\ &= -\int_0^{+\infty} D\varphi(x)\, dx + \int_{-\infty}^0 D\varphi(x)\, dx = 2\varphi(0).\end{aligned}$$

Pour $n = 2$, on utilise les coordonnées polaires comme dans l'exemple précédent. Dans ces coordonnées, le laplacien s'écrit

$$\Delta = \frac{1}{r}D_r(rD_r) + \frac{1}{r^2}D_\theta^2.$$

En posant

$$\psi(r) = \int_0^{2\pi} \varphi(re^{i\theta})\, d\theta,$$

on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} \ln|x|\Delta\varphi(x)\,dx &= \int_0^{+\infty} r\ln r\,dr \int_0^{2\pi} (\frac{1}{r}D_r(rD_r) + \frac{1}{r^2}D_\theta^2)\varphi(re^{i\theta})\,d\theta \\ &= \int_0^{+\infty} \ln r\, D_r(rD_r\psi(r))\,dr \\ &= -\int_0^{+\infty} D_r\psi(r)\,dr = \psi(0) = 2\pi\varphi(0).\end{aligned}$$

Pour $n \geq 3$, on peut utiliser la distribution $T_\alpha$ introduite au chapitre précédent. On a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Delta\varphi(x)}{|x|^{n-2}}\,dx &= T_{n-2}(\Delta\varphi) = (2\pi)^{-n}(\mathcal{F}^-\mathcal{F}^+T_{n-2})(\Delta\varphi) \\ &= (2\pi)^{-n}(\mathcal{F}^+T_{n-2})(\mathcal{F}^-\Delta\varphi) \\ &= (2\pi)^{-n}\frac{4\pi^{n/2}}{\Gamma((n-2)/2)}T_2(\mathcal{F}^-\Delta\varphi) \\ &= -(2\pi)^{-n}\frac{4\pi^{n/2}}{\Gamma((n-2)/2)}\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{F}^-\varphi(\xi)\,d\xi \\ &= -4\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2-1)}\varphi(0)\end{aligned}$$

car

$$\mathcal{F}^-(\Delta\varphi)(\xi) = -|\xi|^2(\mathcal{F}^-\varphi)(\xi).$$

**Exemple 5.1.5** *Dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, une solution élémentaire de l'opérateur de la chaleur $-\Delta + D_t$ est donnée par*

$$T(\varphi) = \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}(4\pi t)^{-n/2}e^{-|x|^2/4t}\varphi(t,x)\,dtdx.$$

En effet, la fonction

$$F(t,x) = (4\pi t)^{-n/2}e^{-|x|^2/4t}Y(t)$$

est localement intégrable dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$: de fait, elle est positive et

$$\int_{\mathbb{R}^n}(4\pi t)^{-n/2}e^{-|x|^2/4t}Y(t)\,dx = Y(t)$$

est localement intégrable dans $\mathbb{R}$. Elle définit une distribution tempérée car $(1+t)^{-2}F(t,x)$ est intégrable dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$.

Calculons sa transformée de Fourier. On a

$$(\mathcal{F}^+T)(\varphi) = \int_0^{+\infty}(4\pi t)^{-n/2}\,dt\int e^{-|x|^2/4t}\,dx\int e^{i(t\eta+x.\xi)}\varphi(\eta,\xi)\,d\eta d\xi$$

$$= \int_0^{+\infty}dt\int\varphi(\eta,\xi)e^{-t|\xi|^2+it\eta}\,d\eta d\xi = \lim_{N\to+\infty}\int\varphi(\eta,\xi)\,d\eta d\xi\int_0^N e^{-t|\xi|^2+it\eta}\,dt$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \int \varphi(\eta,\xi) \frac{1-e^{-N(|\xi|^2-it\eta)}}{|\xi|^2-i\eta}\, d\eta d\xi = \int \frac{\varphi(\eta,\xi)}{|\xi|^2-i\eta}\, d\eta d\xi.$$

La dernière égalité résulte du théorème de Lebesgue. La fonction $(\eta,\xi)\mapsto 1/(|\xi|^2-i\eta)$ est localement intégrable dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ car

$$\int_{-1}^{1} |\frac{1}{|\xi|^2-i\eta}|\, d\eta = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|\xi|^4+|\eta|^2}}\, d\eta = 2\,\mathrm{arcsh}(\frac{1}{|\xi|^2})$$

et

$$\lim_{r\to0^+} r^{n-1}\,\mathrm{arcsh}(1/r^2) = \lim_{r\to+\infty} \frac{\mathrm{arcsh}\, r}{r^{(n-1)/2}} = \lim_{r\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{1+r^2}(n-1)r^{(n-3)/2}} = 0.$$

(on a même $\lim_{r\to+\infty} \frac{\mathrm{arcsh}(r)}{\ln(r)} = 1$.) Cela étant

$$((-\Delta+D_t)T)(\varphi) = T((-\Delta-D_t)\varphi) = (2\pi)^{-n-1}(\mathcal{F}^+T)(\mathcal{F}^-((-\Delta-D_t)\varphi))$$

$$= (2\pi)^{-n-1}(\mathcal{F}^+T)_{(\eta,\xi)}((|\xi|^2-i\eta)\mathcal{F}^-\varphi(\eta,\xi)) = (2\pi)^{-n-1}(\mathcal{F}^+\mathcal{F}^-\varphi)(0) = \varphi(0).$$

**Exemple 5.1.6** *En ce qui concerne l'opérateur des ondes, on a le résultat suivant, démontré plus loin.*

*Pour $n = 1,2,3$ des solutions élémentaires $E_n$ de l'opérateur des ondes sont données par*

$$\begin{aligned} E_1(\varphi) &= \frac{1}{2}\int_{t\geq|x|} \varphi(t,x)\, dtdx, \\ E_2(\varphi) &= \frac{1}{2\pi}\int_{t\geq|x|} \frac{\varphi(t,x)}{\sqrt{t^2-|x|^2}}\, dtdx, \\ E_3(\varphi) &= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(|x|,x)}{|x|}\, dx. \end{aligned}$$

*Pour tout $n$, le support singulier de $E_n$ est $\{(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n : t=|x|\}$.*

**Exemple 5.1.7** *Les équations de Lamé qui gouvernent les déformations d'un corps élastique s'écrivent $Pu=f$ avec*

$$P(D) = \mu\Delta + (\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}$$

*où $\lambda,\mu$ sont des constantes physiques du milieu qui vérifient $\mu>0$ et $\lambda+\mu>0$.*

Par définition, une solution élémentaire de $P$ est une matrice $E$ de distributions telle que $P(D)E=\delta I$.

Si $n=2$, une solution élémentaire $E_2$ est définie par la fonction localement intégrable

$$E_2(x) = \frac{1}{4\pi\mu(\lambda+2\mu)}\Big((\lambda+3\mu)\log|x|\, I - (\lambda+\mu)\frac{>x,x<}{|x|^2}\Big)$$

Si $n>2$, on peut prendre

$$E_n(x) = -\frac{1}{2\omega_{n-1}\mu(\lambda+2\mu)}\Big(\frac{\lambda+3\mu}{(n-2)|x|^{n-2}}\, I + (\lambda+\mu)\frac{>xx<}{|x|^n}\Big).$$

## 5.2 Premières conséquences

**Proposition 5.2.1** *Soit $P$ un opérateur de dérivation à coefficients constants qui possède une solution élémentaire qui est de classe $C_\infty$ en dehors de l'origine. Pour tout ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$,*

- *si $u \in D'(\Omega)$ et $Pu \in C_\infty(\Omega)$ alors $u \in C_\infty(\Omega)$,*
- *si $u_j \in C_\infty(\Omega)$ est une suite de solutions de $Pu = 0$ qui converge dans $D'(\Omega)$ alors la suite $u_j$ converge uniformément sur tout compact de $\Omega$ avec toutes ses dérivées.*

*Preuve.* On désigne par $E$ une solution élémentaire de $P$ telle que $[E]_s = \{0\}$. Dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, c'est la distribution d'une fonction $e \in C_\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

Démontrons le premier point. Soit $u \in D'(\Omega)$ tel que $Pu \in C_\infty(\Omega)$. Soit $\omega$ un ouvert d'adhérence compacte dans $\Omega$ et $\chi \in D(\Omega)$ égal à 1 dans un voisinage $\overline{\omega}$. On a

$$\chi u = E * P(\chi u) = E * (\chi P u) + E * v$$

où $v$ est une distribution dans $\mathbb{R}^n$, à support compact et dont le support est disjoint de $\overline{\omega}$. Il suffit de montrer que $E * v$ est de classe $C_\infty$ dans $\omega$. Si $\varphi \in D(\omega)$, il vient

$$\begin{aligned}(E * v)(\varphi) &= E_{(x)}(v_{(y)}(\varphi(x+y))) \\ &= \int e(x) v_{(y)}(\varphi(x+y))\, dx \\ &= v_{(y)}(\int e(x)\varphi(x+y)\, dx) \\ &= v_{(y)}(\int e(x-y)\varphi(x)\, dx) \\ &= \int \varphi(x) v_{(y)}(e(x-y))\, dx.\end{aligned}$$

Le fonction $v_{(y)}(e(x-y))$ est de classe $C_\infty$ dans $\omega$ en vertu du théorème 2.5.1.

Démontrons le second point. La suite $u_j$ converge dans $D'(\Omega)$ vers une distribution $u$ qui vérifie $Pu = 0$. Par le premier point, $u \in C_\infty(\Omega)$. Quitte à considérer la suite $u_j - u$, on peut donc supposer que $u = 0$. Comme ci-dessus, on a $u_j = E * g_j$ dans $\omega$ avec $g_j = P(\chi u_j)$. Ainsi

$$D^\alpha u_j(x) = \int g_j(y) D^\alpha e(x-y)\, dy$$

pour tout $x \in \omega$ et tout $\alpha$. La suite $g_j$ converge vers 0 dans $D'(\Omega)$ et il existe un compact $K$ disjoint de $\omega$ tel que $[g_j] \subset K$ pour tout $j$. Le théorème 2.6.5 montre que la suite $u_j$ converge vers 0 dans $C_\infty(\omega)$. □

## 5.3 Une introduction aux espaces de Sobolev

### 5.3.1 Une première approche

**Définition 5.3.1** *Si $s \in \mathbb{R}$, on définit l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ d'ordre $s$ comme étant l'espace linéaire*

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \ : \ (1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u} = \text{ distrib. ass. à une fonction} L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

Par abus d'écriture, on note $(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}$ la fonction dont il est question dans l'énoncé.

Sur cet espace, on considère l'expression

$$\left\|(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}(\xi)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

**Propriété 5.3.2** *L'expression précédente est une norme sur $H^s(\mathbb{R}^n)$. Muni de cette norme (qui provient en fait d'un produit scalaire), l'espace $H^s(\mathbb{R}^n)$ est un espace normé complet (c'est même un espace de Hilbert).*

*Preuve.* A compléter (voir cours).□

On a aussi les propriétés suivantes (parmi beaucoup d'autres).

**Propriété 5.3.3** *a) Si $s_1 \geq s_2$ alors $H^{s_1}(\mathbb{R}^n) \subset H^{s_2}(\mathbb{R}^n)$ et l'injection canonique est continue.*
*b) Pour tout $s$, l'ensemble $D(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^n)$.*
*c) Si $u$ est une distribution à support compact, alors il existe $s$ tel que $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$.*

*Preuve.* A compléter (voir cours).□

**Théorème 5.3.4** *Si $s > k + \frac{n}{2}$ alors*

$$H^s(\mathbb{R}^n) \subset \{f \in C_k(\mathbb{R}^n) : f \to 0 \text{ à l'infini }\}$$

*et l'injection canonique est continue.*

En particulier, si $n = 1$, alors $H^s(\mathbb{R}) \subset C_0(\mathbb{R})$ lorsque $s > 1/2$.
*Preuve.* A compléter (voir cours).□

### 5.3.2 Espaces de Sobolev, une suite

Dans ce qui précède, on a introduit les espaces de Sobolev d'ordre quelconque dans $\mathbb{R}^n$ via la transformation de Fourier des distributions tempérées. Qu'en est-il lorsque l'on ne travaille qu'avec des ouverts de $\mathbb{R}^n$?

**Définitions**

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$.

On a le résultat suivant.

**Propriété 5.3.5** *Pour tout entier $m \geq 0$, on a*

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n) \ \text{si}\ |\alpha| \leq m\}.$$

*C'est un espace de Hilbert pour la norme*

$$\|u\|_m^2 = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

*laquelle est équivalente à celle définie précédemment.*

Ainsi, on définit les espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$ de la manière suivante.

**Définition 5.3.6** *Pour tout entier $m \geq 0$, on définit*

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega) \ \text{si}\ |\alpha| \leq m\}.$$

On montre aussi que c'est un espace de Hilbert pour la norme

$$\|u\|_m^2 = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega}.$$

Pour $m \in \mathbb{N}$, on note $H^{-m}(\Omega)$ l'ensemble des distributions $u$ dans $\Omega$ pour lesquelles il existe $C > 0$ tel que

$$|u(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_m$$

pour tout $\varphi \in D(\Omega)$. Si on désigne par $H_0^m(\Omega)$ l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$, on a

$$H^{-m}(\Omega) = (H_0^m(\Omega))'.$$

On pose

$$\|u\|_{-m} = \sup_{\varphi\in D(\Omega), \|\varphi\|_m \leq 1} |u(\varphi)|.$$

Muni de cette norme, $H^{-m}(\Omega)$ est un espace de Hilbert et l'application $u \in H^{-m}(\Omega) \to H_0^m(\Omega)$ $u \mapsto v$ unique tel que $u(\varphi) = \langle v, \varphi\rangle_m$ est une isométrie.

Dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^n$, l'ensemble $D(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^m(\mathbb{R}^n)$ de sorte que $H^{-m}(\mathbb{R}^n) = (H^m(\mathbb{R}^n))'_b$.

La définition des espaces de Sobolev $H^s(\Omega)$, où $s \in \mathbb{R}$ et $\Omega$ est un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^n$ est beaucoup plus technique. Nous renvoyons à un livre classique sur les espaces de Sobolev ([1], mais aussi [3], [4]).

**Suite**

Signalons une première application des espaces de Sobolev dans ce cadre.

**Théorème 5.3.7** *1) Pour tous $s, k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$ et $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$, il existe un seul élément $u \in H^{s+2}(\mathbb{R}^n)$ tel que*

$$(-\Delta + k^2)u = f.$$

*2) L'opérateur $-\Delta + id \; : \; H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ est une isométrie.*

Etablissons une généralisation de la formule de dérivation des fonctions composées.

**Proposition 5.3.8** *Soit $\chi : \Omega \to U$ un changement de variable de classe $C_\infty$. Si les matrices jacobiennes $D\chi$ et $D\chi^{-1}$ sont bornées et $u \in H^1(U)$ alors $u \circ \chi \in H^1(\Omega)$ et*

$$D_{x_j}(u \circ \chi) = \sum_{k=1}^{n} (D_{y_k} u \circ \chi)\, D_{x_j}\chi_k.$$

**Proposition 5.3.9 (Poincaré)** *Si $\Omega$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, il existe une constante $C > 0$, qui ne dépend que du diamètre de $\Omega$, telle que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \| \operatorname{grad} u\|_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^n)}$$

*pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$.*

Ce résultat montre que, sur le sous-espace $H_0^1(\Omega)$ de $H^1(\Omega)$, la norme $\| \operatorname{grad} u\|_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^n)}$ est équivalente à la norme de $H^1(\Omega)$. La proposition 5.3.9 est une conséquence immédiate du résultat suivant.

On appelle *bande de largeur d* tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ de la forme $\{x \in \mathbb{R}^n : a < \xi.x < b\}$ où $a, b \in \mathbb{R}$, $d = b - a$ et $\xi$ est un vecteur de module 1.

**Lemme 5.3.10** *Si $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ inclus dans une bande de largeur $d$, on a*

$$\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{d}{\sqrt{2}} \| \operatorname{grad} \varphi\|_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^n)}$$

*pour tout $\varphi \in D(\Omega)$.*

Désignons par $\overline{C}_\infty(\Omega)$ l'ensemble des restrictions à $\Omega$ des éléments de $C_\infty(\mathbb{R}^n)$.

**Théorème 5.3.11** *Pour tout ouvert borné $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$, l'injection $H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ est compacte*[1]*.*

---

[1] Une application linéaire $T$ entre les espaces normés $E, F$ est dite compacte si l'image de la boule unité de $E$ est relativement compacte dans $F$. Dans le cas où $E, F$ sont des espaces de Hilbert, on démontre que $T$ est une application compacte si et seulement si pour toute suite $e_m$ qui converge faiblement dans $E$, la suite $Te_m$ converge dans $F$.

**Définition 5.3.12** *Un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$ est dit lipschitzien si pour tout $x_0 \in \partial\Omega$, il existe un intervalle ouvert $J = J' \times J_n$ contenant $0$, une matrice orthogonale $U$ et une fonction lipschitzienne $f$ dans $J'$ tels que*

$$\Omega \cap (x_0 + U(J)) = \{x_0 + Uy : y \in J,\, y_n < f(y')\}$$

*et*

$$\partial\Omega \cap (x_0 + U(J)) = \{x_0 + Uy : y \in J,\, y_n = f(y')\}.$$

On vérifie aisément que tout ouvert de classe $C_\infty$ est lipschitzien.
Signalons le résultat suivant.

**Théorème 5.3.13** *Un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$ est lipschitzien si et seulement si pour tout $x_0 \in \partial\Omega$ il existe un voisinage ouvert $\omega$ de $x$ dans $\mathbb{R}^n$, une matrice orthogonale $U$ et $C, \epsilon > 0$ tels que $x + y \in \Omega$ si $x \in \overline{\Omega} \cap \omega$ et $y \in U(\Gamma)$ avec $\Gamma = \{h \in \mathbb{R}^n : C|h'| < h_n < \epsilon\}$.*

On dit que $\Omega$ vérifie la condition du cône uniforme.

**Théorème 5.3.14** *Si $\Omega$ est un ouvert borné lipschitzien de $\mathbb{R}^n$ alors*

- *l'opérateur de restriction $H^m(\mathbb{R}^n) \to H^m(\Omega)$ est surjectif pour tout entier $m \geq 0$,*
- *$\overline{C}_\infty(\Omega)$ est dense dans $H^m(\Omega)$ pour tout entier $m \geq 0$,*
- *l'application trace $\gamma : \overline{C}_\infty(\Omega) \to C_0(\partial\Omega)$ se prolonge de manière unique en un opérateur linéaire continu de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$,*
- *le noyau de cet opérateur est $H^1_0(\Omega)$,*
- *son image est l'ensemble des fonctions $u \in L^2(\partial\Omega)$ telles que*

$$\int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+1}}\, dxdy < +\infty,$$

- *l'injection $H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ est compacte.*

On désigne l'image de $\gamma$ par $H^{1/2}(\partial\Omega)$.

**Théorème 5.3.15** *Si $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de classe $C_\infty$ alors*

$$\overline{C}_\infty(\Omega) = \bigcap_{m=1}^{+\infty} H^m(\Omega).$$

## 5.4 Le principe du maximum pour les fonctions harmoniques

Rappelons deux formules utiles.

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on a (cf théorie de la mesure pour $l_n = l \times \sigma$ ou changement de variables polaires dans $\mathbb{R}^n$)

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} r^{n-1}\,dr \int_{S_{n-1}} f(re)\,d\sigma(e).$$

Si $f \in C_1(\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\})$, on a (formule de Stokes ou de Gauss dans $\mathbb{R}^n$)

$$\int_{S_{n-1}} f(e)e_j\,d\sigma(e) = \int_{|x|<1} D_{x_j} f(x)\,dx$$

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une fonction réelle $h$ de classe $C^2$ dans $\Omega$ est dite *harmonique* si

$$\Delta h = \sum_{j=1}^{n} D_{x_j}^2 h = 0.$$

Une des propriétés fondamentales des fonctions harmoniques est la propriété de la moyenne.

**Proposition 5.4.1** *Si $h$ est une fonction harmonique dans $\Omega$ et $0 < r < d(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$, alors*

$$h(x) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{S_{n-1}} h(x + r\omega)\,d\sigma(\omega)$$

*où $\omega_{n-1}$ est la mesure de la sphère unité $S_{n-1}$ de $\mathbb{R}^n$.*

Pour toute fonction continue $f$ posons

$$(Mf)(r) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{S_{n-1}} f(re)\,d\sigma(e).$$

La proposition 5.4.1 est une conséquence immédiate du lemme suivant.

**Lemme 5.4.2** *Si $f$ est de classe $C^2$ dans $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$, la fonction $Mf$ est de classe $C^2$ dans l'intervalle $]-R, R[$ et*

$$\frac{1}{r^{n-1}} D_r(r^{n-1} D_r Mf(r)) = M(\Delta f)(r).$$

*Preuve.* En utilisant la formule

$$\int_{S_{n-1}} f(e)e_j\,d\sigma(e) = \int_{|x|<1} D_{x_j} f(x)\,dx,$$

on trouve

$$\begin{aligned} D_r Mf(r) &= \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{S_{n-1}} \sum_{j=1}^{n} e_j (D_{x_j} f)(re)\,d\sigma(e) = \frac{r}{\omega_{n-1}} \int_{|x|<1} \Delta f(rx)\,dx \\ &= \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int_{|x|<r} \Delta f(x)\,dx = \frac{1}{r^{n-1}} \int_0^r t^{n-1} M(\Delta f)(t)\,dt \end{aligned}$$

Ainsi
$$D_r\left[r^{n-1}D_rMf(r)\right] = r^{n-1}M(\Delta f)(r).$$
□

**Corollaire 5.4.3** *Soit $\Omega$ un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ et $h$ une fonction harmonique dans $\Omega$. S'il existe $x_0 \in \Omega$ tel que $h(x) \leq h(x_0)$ pour tout $x \in \Omega$ alors $h$ est constant dans $\Omega$.*

*Preuve.* Désignons par $e$ l'ensemble des points $x$ de $\Omega$ qui vérifient $h(x) = h(x_0)$. Cet ensemble est fermé puisque $h$ est continu. Il suffit de montrer que $e$ est également ouvert. Soit $x_1$ un point de $e$ et $\rho \in ]0, d(x_1, \mathbb{R}^n \setminus \Omega[)$. En vertu de la proposition 5.4.1, on a
$$\int_{S_{n-1}} (h(x_1) - h(x_1 + \rho e))\, d\sigma(e) = 0.$$
Par hypothèse, l'intégrand est positif. On a donc $h(x_1 + \rho e) = h(x_1)$ pour tout $e$ puisque $h$ est continu. La fonction $h$ est donc égale à $h(x_0)$ dans un voisinage de $x_1$. □

**Corollaire 5.4.4** *Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Si $h$ est une fonction continue dans $\overline{\Omega}$ et harmonique dans $\Omega$ alors*
$$\sup_{\overline{\Omega}} h = \sup_{\partial\Omega} h.$$

*Preuve.* Soit $x_0$ un point de $\overline{\Omega}$ qui réalise la borne supérieure de $h$. Supposons que $x_0 \in \Omega$. Par le corollaire 5.4.3, $h$ est constant dans la composante connexe $\omega$ de $x_0$ dans $\Omega$. Si $x_1 \in \partial\omega$, on a $h(x_1) = h(x_0)$ et $x_1 \in \partial\Omega$ donc la borne supérieure de $h$ est aussi atteinte sur $\partial\Omega$. □

## 5.5 Le problème de Dirichlet

Le problème de Dirichlet pour le laplacien dans un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$ est un problème typique des équations aux dérivées partielles. On dispose de théorèmes d'existence et d'unicité très précis. Cependant, ils font appel à des propriétés fines des espaces de Sobolev. Celles-ci sortent du cadre de ce cours. Dans ce paragraphe, nous indiquons brièvement les résultats essentiels sans en donner toutes les démonstrations. Nous traitons en détail le cas où $\Omega$ est une boule.

### 5.5.1 Existence et unicité de la solution

**Théorème 5.5.1** *Soit $\Omega$ un ouvert lipschitzien, borné de $\mathbb{R}^n$. Si $f \in H^{-1}(\Omega)$ et $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ alors il existe $u \in H^1(\Omega)$ unique tel que*
$$\begin{cases} -\Delta u = f \\ \gamma u = g. \end{cases} \tag{5.1}$$

*Preuve.* Par définition de $H^{1/2}(\partial\Omega)$, il existe $u_0 \in H^1(\Omega)$ tel que $\gamma u_0 = g$. On considère l'espace de Hilbert $H_0^1(\Omega)$ muni de la norme $\|\operatorname{grad} u\|_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^n)}$. La forme linéaire

$$H_0^1(\Omega) \ni \varphi \mapsto \overline{f}(\varphi) - \int_\Omega \operatorname{grad}\varphi\, \overline{\operatorname{grad} u_0}\, d\lambda$$

est continue sur cet espace. Il existe donc $v \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega \operatorname{grad}\varphi\, \overline{\operatorname{grad} v}\, d\lambda = \overline{f}(\varphi) - \int_\Omega \operatorname{grad}\varphi\, \overline{\operatorname{grad} u_0}\, d\lambda$$

pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. On pose $u = u_0 + v$. On a $-\Delta u = f$ et $\gamma u = g$ car la trace de $v$ est nulle.

Prouvons l'unicité. Soit $u \in H^1(\Omega)$ tel que $\Delta u = 0$ et $\gamma u = 0$. Par le théorème des traces, on a $u \in H_0^1(\Omega)$. Pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, on a

$$0 = -(\Delta u)(\varphi) = \int_\Omega \operatorname{grad} u. \operatorname{grad}\varphi\, d\lambda.$$

Puisque $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, on obtient $\operatorname{grad} u = 0$ presque partout. Ainsi $u$ est constant. Puisque sa trace est nulle, il est nul. □

**Théorème 5.5.2** *Si $\Omega$ est de classe $C_\infty$, $f \in \overline{C}_\infty(\Omega)$ et $g \in C_\infty(\partial\Omega)$ alors la solution $u$ de 5.1 appartient à $\overline{C}_\infty(\Omega)$.*

C'est une conséquence du résultat suivant.

**Proposition 5.5.3** *Soit $\Omega$ un ouvert borné de classe $C_\infty$, $m \geq 0$ et $X \in \overline{C}_\infty(\Omega;\mathbb{R}^n)$ un champ de vecteurs. Considérons l'opérateur $L = -\Delta + X$. Si $u \in H_0^1(\Omega)$ et $Lu \in H^{m-1}(\Omega)$ alors $u \in H^{m+1}(\Omega)$. De plus, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\|u\|_{m+1} \leq C(\|(-\Delta + X)u\|_{m-1} + \|u\|_m)$$

*pour tout $u \in H^{m+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.*

### 5.5.2 Le problème de Dirichlet dans une boule

Soit $R > 1$ et

$$B = B(R) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}, \quad b = b(R) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq R\}.$$

On suppose $n > 1$.

Soit $f$ une fonction continue sur $\partial B$. Dans ce cas particulier, considérons le problème qui consiste à déterminer une fonction $u$ continue dans $b$, de classe $C_2$ dans $B$ et telle que

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 \\ u_{|\partial B} = f. \end{cases}$$

La proposition suivante ramène la résolution de ce problème à la recherche d'une fonction sur le bord de $B$. On désigne par $\nu$ la normale unitaire intérieure à $B$ et par $E \in D'(\mathbb{R}^n)$ une solution élémentaire de $-\Delta$ associée à la fonction $e \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \cap C_\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

**Proposition 5.5.4** *Si u une fonction de classe $C_2$ dans b qui est harmonique dans $B$, on a*

$$u(x) = \int_{\partial B} (D_{\nu_y} e(x-y) u_0(y) - e(x-y) u_1(y))\, d\sigma(y)$$

*pour tout $x \in B$ si $u_0 = u_{|\partial B}$ et $u_1 = D_\nu u_{|\partial B}$*

*Preuve.* Soit $u^e$ la distribution dans $\mathbb{R}^n$ définie par

$$u^e(\varphi) = \int_B u(x)\varphi(x)\, dx.$$

Calculons $-\Delta u^e$. On a

$$\begin{aligned}
(-\Delta u^e)(\varphi) &= -\int_B u(x)\Delta\varphi(x)\, dx \\
&= -\int_B \Delta u(x)\varphi(x)\, dx - \sum_{j=1}^n \int_B D_{x_j}(u(x)D_{x_j}\varphi(x) - \varphi(x)D_{x_j}u(x))\, dx \\
&= \int_{\partial B} (uD_\nu\varphi - \varphi D_\nu u)\, d\sigma \\
&= \int_{\partial B} (u_0 D_\nu \varphi - \varphi u_1)\, d\sigma
\end{aligned}$$

si $\nu$ est la normale intérieure de $B$.

On a $u^e = E * (-\Delta u^e)$ donc

$$\begin{aligned}
u^e(\varphi) &= E_{(x)}\left(\int_{\partial B} (u_0(y)D_{\nu_y}\varphi(x+y) - \varphi(x+y)u_1(y))d\sigma(y)\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e(x)\left(\int_{\partial B} (u_0(y)D_{\nu_y}\varphi(x+y) - \varphi(x+y)u_1(y))d\sigma(y)\right) dx \\
&= \int_{\partial B} \left(u_0(y)D_{\nu_y}\int_{\mathbb{R}^n} e(x)\varphi(x+y)\, dx - u_1(y)\int_{\mathbb{R}^n} e(x)\varphi(x+y)\, dx\right) d\sigma(y) \\
&= \int_{\partial B} \left(u_0(y)D_{\nu_y}\int_{\mathbb{R}^n} e(x-y)\varphi(x)\, dx - u_1(y)\int_{\mathbb{R}^n} e(x-y)\varphi(x)\, dx\right) d\sigma(y)
\end{aligned}$$

pour $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$. Si $\varphi \in D(B)$, on peut redériver sous le signe et permuter les intégrales; dès lors

$$u^e(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx \int_{\partial B} (D_{\nu_y}e(x-y)u_0(y) - e(x-y)u_1(y))\, d\sigma(y).$$

Ainsi

$$u(x) = \int_{\partial B} (D_{\nu_y}e(x-y)u_0(y) - e(x-y)u_1(y))\, d\sigma(y)$$

pour tout $x \in B$. $\square$

En utilisant les expressions explicites de $e$ données dans l'exemple 5.1.4, on trouve les formules de représentation

$$u(x) = \frac{1}{\omega_{n-1}R}\int_{\partial B} \frac{R^2 - x.y}{|x-y|^n}\, u_0(y)\, dy - \frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}}\int_{\partial B} \frac{u_1(y)}{|x-y|^{n-2}}\, d\sigma(y)$$

si $n > 2$ et

$$u(x) = \frac{1}{2\pi R}\int_{\partial B} \frac{R^2 - x.y}{|x-y|^2}\, u_0(y)\, dy + \frac{1}{2\pi}\int_{\partial B} u_1(y) \ln|x-y|\, d\sigma(y)$$

si $n = 2$.

Dans cette expression seul $u_1$ est inconnu. Plutôt que de déterminer directement $u_1$, recherchons une solution $u$ du problème de Dirichlet sous la forme précédente pour des données frontières $v_0$ et $v_1$ qui ne sont pas nécessairement $u_{|\partial B}$ et $D_\nu u_{|\partial B}$.

Quelles que soient les données frontière, l'expression précédente est une solution de $\Delta$ dans $B$ car $x \to e(x-y)$ et $x \to D_{\nu_y} e(x-y)$ sont harmoniques par rapport à $x$ dans $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$. Il reste donc à choisir $v_0$ et $v_1$ de telle manière que $u_{|\partial B} = f$. Il faut pour cela être capable de calculer les limites sur le bord des deux intégrales.

Si $|y| = R$, on a

$$R^2 - x.y = \frac{1}{2}|x-y|^2 + \frac{1}{2}(R^2 - |x|^2).$$

Ainsi

$$\frac{R^2 - x.y}{|x-y|^n} = \frac{1}{2}\left(\frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^n} + \frac{1}{|x-y|^{n-2}}\right).$$

**Lemme 5.5.5** *On a*

$$\int_{\partial B} \frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^n}\, d\sigma(y) = \omega_{n-1} R$$

*si* $|x| < R$.

*Preuve.* D'une part, si $x = rz$ avec $|z| = R$ et $0 \leq r < 1$, on a $|x-y| = |ry - z|$ si $|y| = R$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B} \frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^n}\, d\sigma(y) &= \int_{\partial B} \frac{R^2 - r^2|y|^2}{|ry-z|^n}\, d\sigma(y) \\
&= \frac{1}{r^{n-1}}\int_{\partial B(rR)} \frac{R^2 - |e|^2}{|e-z|^n}\, d\sigma(e) \\
&= R^{n-1}\int_{S_{n-1}} \frac{R^2 - rR|e|^2}{|re-z|^n}\, d\sigma(e) \\
&= R\omega_{n-1}
\end{aligned}$$

en vertu de la proposition 5.4.1 puisque la fonction $e \to (R^2 - |e|^2)/|e-z|^n$ est harmonique dans un voisinage de $B(rR)$. □

**Lemme 5.5.6** *Si* $U \in C_0(\partial B)$ *et* $x_0 \in \partial B$ *alors*

$$\lim_{x \to x_0, x \in B} \frac{1}{\omega_{n-1} R}\int_{\partial B} \frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^n} U(y)\, d\sigma(y) = U(x_0)$$

*Preuve.* Posons

$$P(x,y) = \frac{1}{\omega_{n-1}R}\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^n}.$$

Vu le lemme précédent, on a $\int_{\partial B} P(x,y)\,d\sigma(y) = 1$ pour $|x|<R$. Si $x_0 \in \partial B$, $U \in C_0(\partial B)$ et $\eta > 0$, on a, pour $x \in B$,

$$\begin{aligned}
|\int_{\partial B} P(x,y)U(y)\,d\sigma(y) - U(x_0)| &= \int_{\partial B} P(x,y)(U(y)-U(x_0)\,d\sigma(y)| \\
&\leq \sup_{|y-x_0|\leq\eta} |U(y)-U(x_0)| \\
&\quad + \int_{|y-x_0|\geq\eta} P(x,y)|U(y)-U(x_0)|\,d\sigma(y) \\
&\leq \sup_{|y-x_0|\leq\eta} |U(y)-U(x_0)| + \frac{C}{(\eta-|x-x_0|)^n}(R^2-|x|^2)
\end{aligned}$$

Fixons $\epsilon > 0$. Puisque la fonction $U$ est continue, le premier terme de la majorante est inférieur à $\epsilon/2$ dès que $\eta$ est assez petit. Pour $\eta$ fixé, il suffit de prendre $x$ assez proche de $x_0$ pour rendre la majorante inférieure à $\epsilon$. $\square$

Résolvons à présent le problème de Dirichlet dans $B$.

**Proposition 5.5.7** *Si $f \in C_0(\partial B)$ alors la solution du problème de Dirichlet*

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 \\ u_{|\partial B} = f. \end{cases}$$

*est donnée par*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_{n-1}R}\int_{\partial B}\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^n}f(y)\,d\sigma(y).$$

*Cette solution est unique.*

*Preuve.* Supposons $n > 2$. En prenant $u_0 = 2f$ et $u_1 = (n-2)f/R$ dans la formule de représentation de $u$, on trouve la solution annoncée. Si $n = 2$, on choisit $u_1 = 0$. La fonction $u_0$ doit alors vérifier

$$\frac{1}{2}U_0(x) + \frac{1}{4\pi R}\int_{\partial B} U_0(y)\,d\sigma(y) = f(x).$$

On peut prendre

$$u_0(x) = 2f(x) - \frac{1}{2\pi R}\int_{\partial B} f(y)\,d\sigma(y).$$

On obtient ainsi la solution annoncée.

Cette solution est unique. De fait, si $u$ et $u'$ sont deux solutions du problème, on a

$$\sup_b (u-u') = \sup_{\partial B}(u-u') = 0$$

par le corollaire 5.4.4. Ainsi $u \leq u'$. De la même façon $u' \leq u$ donc $u = u'$. $\square$

## 5.6 Le problème de Cauchy pour l'opérateur de la chaleur

La solution élémentaire de l'exemple 5.1.5 permet de résoudre le problème de Cauchy pour l'opérateur de la chaleur.

Soit $f \in D'(\mathbb{R}^n)$ une distribution à support compact. Le problème de Cauchy pour l'opérateur de la chaleur consiste à déterminer une distribution prolongeable $u \in D'(]0,+\infty[\times\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\begin{cases} (-\Delta + D_t)u = 0 \quad \text{dans} \quad ]0,+\infty[\times\mathbb{R}^n, \\ u_{|t=0+} = f. \end{cases}$$

En vertu des résultats relatifs aux traces, l'équation vérifiée par $u$ assure l'existence d'une fonction $[0,+\infty[\to D'(\mathbb{R}^n) : t \mapsto u_t$ de classe $C_\infty$ telle que

$$u(\varphi) = \int_0^{+\infty} u_t(\varphi(t,.))\, dt \quad \text{si} \quad \varphi \in D(]0,+\infty[\times\mathbb{R}^n).$$

En particulier, u possède une trace en $t = 0+$.

Supposons que $u$ soit une solution du problème de Cauchy. Si $\psi \in D(]0,+\infty[)$, et $\phi \in D(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\begin{aligned} ((-\Delta + D_t)u)(\psi\otimes\phi) &= -\int_0^{+\infty} u_t((\Delta + D_t)(\psi\otimes\phi))\, dt \\ &= -\int_0^{+\infty} (u_t(\Delta\phi)\psi(t) + u_t(\phi)D_t\psi(t))\, dt \\ &= -\int_0^{+\infty} (u_t(\Delta\phi) - D_t u_t(\phi))\psi(t)\, dt. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$D_t u_t(\phi) = u_t(\Delta\phi).$$

Posons

$$\underline{u}(\varphi) = \int_0^{+\infty} u_t(\varphi(t,.))\, dt$$

pour tout $\varphi \in D(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$. On a

$$\begin{aligned} ((-\Delta + D_t)\underline{u})(\varphi) &= -\int_0^{+\infty} u_t((\Delta + D_t)\varphi(t,.))\, dt \\ &= -\int_0^{+\infty} D_t\left[u_t(\varphi(t,.))\right]\, dt = f(\varphi(0,.)). \end{aligned}$$

De là

$$(-\Delta + D_t)\underline{u} = \delta_0 \otimes f.$$

Si le support de $f$ est compact, une solution de cette équation est donnée par

$$\underline{u} = T * (\delta_0 \otimes f).$$

Si la distribution $f$ est définie par une fonction localement intégrable, encore notée $f$, il vient

$$\begin{aligned} \underline{u}(\varphi) &= \int_0^{+\infty} dt \int_{\mathbb{R}^n} (4\pi t)^{-n/2} e^{-|x|^2/4t} dx \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t, x+y) f(y)\, dy \\ &= \int_0^{+\infty} dt \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t,x)\, dt dx \int_{\mathbb{R}^n} (4\pi t)^{-n/2} e^{-|x-y|^2/4t} f(y)\, dy. \end{aligned}$$

La distribution $u$ est donc définie dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ par la fonction

$$u(t,x) = (4\pi t)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-|x-y|^2/4t}\, dy.$$

On constate sur cette formule que la valeur en un point $y$ de $f$ influence la valeur de $u$ en tout point $x$ dès que $t > 0$. Cette influence est très petite si $|x-y|$ est grand et $t$ petit. Cependant elle est non nulle. Ceci correspond à une propagation de la chaleur à vitesse infinie. L'équation de la chaleur n'est en fait qu'un modèle approché du phénomène physique qui se propage à vitesse finie.

Cette propagation à vitesse infinie du support empêche également de démontrer l'unicité de la solution du problème de Cauchy. De l'équation $(-\Delta + D_t)\underline{u} = \delta_0 \otimes f$, on ne peut déduire $\underline{u} = T * (\delta_0 * f)$ sans hypothèse sur $u$ car $[\underline{u}]$ et $[T] = ]0, +\infty[\times \mathbb{R}^n$ ne sont en général pas composables. En fait, la solution du problème de Cauchy n'est pas unique. On peut même montrer l'existence de solutions pathologiques.

**Exemple 5.6.1 (Tychonov)** *Il existe une fonction $u \in C_\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ telle que*

- $(-\Delta + D_t)u = 0$ *dans* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$,
- $u(t,x) = 0$ *si* $t \notin [1,2], x \in \mathbb{R}$,
- $u(t,0) > 0$ *si* $t \in ]1,2[$.

Cette solution non nulle du problème de Cauchy avec des données nulles présente un comportement exponentiel à l'infini et donc correspond à une énergie infinie. L'unicité du problème de Cauchy peut être récupérée en imposant des conditions de croissance à l'infini.

## 5.7 L'opérateur des ondes

Abordons à présent l'étude de l'opérateur des ondes

$$-\Delta + D_t^2 = D_t^2 - \sum_{j=1}^n D_{x_j}^2.$$

### 5.7.1 Solution classique en dimension un

Avant de construire une solution élémentaire pour cet opérateur, donnons quelques formules explicites en dimension 1 d'espace. Si $u$ est de classe $C_2$ et

$$(-D_x^2 + D_t^2)u(t,x) = 0$$

alors

$$D_\xi D_\eta[u(\xi+\eta, \xi-\eta)] = 0.$$

Toute solution de classe $C_2$ de l'équation des ondes en dimension 1 s'écrit donc localement sous la forme

$$u(t,x) = f(t+x) + g(x-t).$$

On vérifie aisément que, pour toutes fonctions continues $f, g$, cette expression est encore une solution de l'opérateur des ondes au sens distribution.

Résolvons le problème de Cauchy dans $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} (-D_x^2 + D_t^2)u(t,x) = 0 \quad \text{dans} \quad ]0,+\infty[\times\mathbb{R} \\ u_{|t=0} = u_0, \quad D_t u_{|t=0} = u_1 \end{cases}$$

où $u_0, u_1$ sont des fonctions régulières.

Cherchons $u$ sous la forme

$$u(t,x) = f(t+x) + g(x-t).$$

On obtient les conditions

$$u_0(x) = f(x) + g(x), \quad u_1(x) = Df(x) - Dg(x).$$

Ainsi

$$u(t,x) = \frac{1}{2}(u_0(t+x) + u_0(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(s)\,ds.$$

On peut procéder de la même façon pour résoudre le problème mixte dans l'intervalle $]0,+\infty[$

$$\begin{cases} (-D_x^2 + D_t^2)u(t,x) = 0 \quad \text{dans} \quad ]0,+\infty[\times]0,+\infty[ \\ u_{|t=0} = u_0, \quad D_t u_{|t=0} = u_1 \\ u_{|x=0} = 0. \end{cases}$$

En posant encore

$$u(t,x) = f(t+x) + g(x-t),$$

on obtient les conditions

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) = u_0(x) \quad & \text{si} \quad x > 0 \\ Df(x) - Dg(x) = u_1(x) \quad & \text{si} \quad x > 0 \\ f(t) + g(-t) = 0 \quad & \text{si} \quad t > 0. \end{aligned}$$

Après quelques calculs, on trouve

$$u(t,x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(u_0(t+x) + u_0(x-t)) + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-t}^{x+t} u_1(s)\,ds & \text{si} \quad x \geq t \\[2ex] \dfrac{1}{2}(u_0(t+x) - u_0(t-x)) + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{t-x}^{t+x} u_1(s)\,ds & \text{si} \quad x \leq t. \end{cases}$$

On remarquera que même pour des données $u_0, u_1$ de classe $C_\infty$ dans $[0, +\infty[$, la solution n'est de classe $C_\infty$ en $t = x$ que si $u_0, u_1$ se prolongent dans $\mathbb{R}$ en des fonctions impaires de classe $C_\infty$.

### 5.7.2 Solution élémentaire

En dimension strictement supérieure à 1, la résolution du problème de Cauchy est plus délicate. Nous commençons par construire une solution élémentaire.

**Proposition 5.7.1** *Pour $n = 1, 2, 3$ des solutions élémentaires $E_n$ de l'opérateur des ondes sont données par*

$$\begin{aligned} E_1(\varphi) &= \frac{1}{2}\int_{t\geq|x|} \varphi(t,x)\,dtdx, \\ E_2(\varphi) &= \frac{1}{2\pi}\int_{t\geq|x|} \frac{\varphi(t,x)}{\sqrt{t^2-|x|^2}}\,dtdx, \\ E_3(\varphi) &= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(|x|,x)}{|x|}\,dx. \end{aligned}$$

*Pour tout $n$, le support singulier de $E_n$ est $\{(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n : t = |x|\}$.*

*Preuve.* En vertu de la proposition 2.5.3, il suffit de vérifier l'égalité

$$E_n(D_t^2\phi) = \phi(0) + E_n(\Delta_x\phi)$$

pour les fonctions séparées $\phi(t,x) = \psi(t)\varphi(x)$.

Si $n = 1$, on écrit

$$\begin{aligned} E_1(D_t^2\psi\otimes\varphi) &= \frac{1}{2}\int_{t\geq|x|} D_t^2\psi(t)\varphi(x)\,dtdx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} D_t^2\psi(t)\,dt \int_{-t}^{t}\varphi(x)\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} D_t\psi(t)(\varphi(t)+\varphi(-t))\,dt \\ &= \psi(0)\varphi(0) + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\psi(t)(D_t\varphi(t) - D_t\varphi(-t))\,dt \\ &= \psi(0)\varphi(0) + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\psi(t)\,dt\int_{-t}^{t} D_x^2\varphi(x)\,dx \\ &= \psi(0)\varphi(0) + E_1(\psi\otimes D^2\varphi). \end{aligned}$$

Si $n = 2$, il vient

$$\begin{aligned} E_2(D_t^2\psi \otimes \varphi) &= \frac{1}{2\pi}\int_{|x|\le t} \frac{D_t^2\psi(t)\varphi(x)}{\sqrt{t^2-|x|^2}}\,dtdx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} D_t^2\psi(t)\,dt \int_0^t \frac{r\,dr}{\sqrt{t^2-r^2}} \int_{S_1} \varphi(re)\,d\sigma(e) \\ &= \int_0^{+\infty} D_t^2\psi(t)\,dt \int_0^t \frac{r(M\varphi)(r)}{\sqrt{t^2-r^2}}\,dr. \end{aligned}$$

En vue d'intégration par parties, calculons les dérivées de la dernière intégrale. On a

$$\begin{aligned} D_t \int_0^t \frac{rM\varphi(r)}{\sqrt{t^2-r^2}}\,dr &= D_t\left(t\int_0^1 \frac{sM\varphi(ts)}{\sqrt{1-s^2}}\,ds\right) \\ &= \int_0^1 \frac{sM\varphi(ts)}{\sqrt{1-s^2}}\,ds + t\int_0^1 \frac{s^2(D(M\varphi))(ts)}{\sqrt{1-s^2}}\,ds \\ &= \varphi(0) + t\int_0^1 \sqrt{1-s^2}D(M\varphi)(ts)\,ds + t\int_0^1 \frac{s^2D(M\varphi)(ts)}{\sqrt{1-s^2}}\,ds \\ &= \varphi(0) + t\int_0^1 \frac{D(M\varphi)(ts)}{\sqrt{1-s^2}}\,ds \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} D_t^2 \int_0^t \frac{rM\varphi(r)}{\sqrt{t^2-r^2}}\,dr &= \int_0^1 \frac{(D(M\varphi))(ts)}{\sqrt{1-s^2}}\,ds + t\int_0^1 \frac{s(D^2(M\varphi))(ts)}{\sqrt{1-s^2}}\,ds \\ &= \int_0^t (D_r^2 + \frac{1}{r}D_r)(M\varphi)(r)\,\frac{rdr}{\sqrt{t^2-r^2}} \\ &= \int_0^t \frac{rM(\Delta\varphi)(r)}{\sqrt{t^2-r^2}}\,dr. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} E_2(D_t^2\psi \otimes \varphi) &= -\int_0^{+\infty} D_t\psi(t)\left(\varphi(0) + t\int_0^1 \frac{D(M\varphi)(ts)}{\sqrt{1-s^2}}\,ds\right)dt \\ &= \psi(0)\varphi(0) + \int_0^{+\infty} \psi(t)\,dt \int_0^t \frac{rM(\Delta\varphi)(r)}{\sqrt{t^2-r^2}}\,dr. \\ &= \psi(0)\varphi(0) + E_2(\psi \otimes \Delta\varphi). \end{aligned}$$

Pour $n = 3$, il vient

$$\begin{aligned} E_3(D_t^2\psi \otimes \varphi) &= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} (D_t^2\psi(|x|))\varphi(x)\,\frac{dx}{|x|} \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{+\infty} tD_t^2\psi(t)\,dt \int_{S_2} \varphi(te)\,d\sigma(e) \\ &= \int_0^{+\infty} tD_t^2\psi(t)(M\varphi)(t)\,dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\int_0^{+\infty} D_t\psi(t)((M\varphi)(t) + tD_t(M\varphi)(t))\,dt \\
&= \psi(0)\varphi(0) + \int_0^{+\infty} t\psi(t)(D_t^2(M\varphi)(t) + \frac{2}{t}D_tM\varphi(t))\,dt \\
&= \psi(0)\varphi(0) + \int_0^{+\infty} t\psi(t)M(\Delta\varphi)(t)\,dt \\
&= \psi(0)\varphi(0) + E_3(\psi \otimes \Delta\varphi).
\end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration. □

Signalons quelques résultats plus généraux

**Théorème 5.7.2** *Si $n \geq 1$, la distribution*

$$E_n(\varphi) = (2\pi)^{-n-1}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n} \frac{\check{\varphi}(\tau + is, \xi)}{|\xi|^2 - (\tau + is)^2}\,d\tau d\xi \quad , \quad \varphi \in D(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n),$$

*est indépendante de $s < 0$ et est une solution élémentaire de l'opérateur des ondes $-\Delta + D_t^2$ dont le support est inclus dans $\{(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n : |x| \leq t\}$.*

*On a*

$$E_n(\varphi) = \int_0^{+\infty} E_n(t)(\varphi(t,.))\,dt$$

*avec*

$$E_n(t)(\phi) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}\check{\phi}(\xi)\,d\xi.$$

*En particulier, la distribution $E_n$ est tempérée.*

*Si $n > 1$, $E_n$ possède des traces continues par rapport à $x_n$ et*

$$\hat{E}_n(\tau, \xi', x_n) = \frac{e^{-|x_n|\sqrt{|\xi'|^2 - (\tau - i0)^2}}}{2\sqrt{|\xi'|^2 - (\tau - i0)^2}}.$$

*Dans cette dernière formule, $\sqrt{|\xi'|^2 - (\tau - i0)^2}$ désigne la limite pour $s \to 0-$ de la racine carrée de $|\xi'|^2 - (\tau + is)^2$ dont la partie réelle est positive.*

### 5.7.3 Le problème de Cauchy

Comme pour l'opérateur de la chaleur, la solution élémentaire permet de résoudre le problème de Cauchy. Soient $u_0, u_1$ deux distributions dans $\mathbb{R}^n$ et $f$ une distribution à trace dans $[0, +\infty[\times\mathbb{R}^n$. Le problème de Cauchy pour l'opérateur des ondes consiste à déterminer une distribution $u \in D'(]0, +\infty[\times\mathbb{R}^n)$ prolongeable telle que

$$\begin{cases} (-\Delta + D_t^2)u = f \quad \text{dans} \quad ]0, +\infty[\times\mathbb{R}^n \\ u_{|t=0+} = u_0, \; D_t u_{|t=0+} = u_1 \end{cases}$$

En vertu du théorème A.0.4, si $u$ est une solution de ce problème, il existe une fonction $[0, +\infty[\to D'(\mathbb{R}^n) : t \mapsto u_t$ de classe $C_\infty$ telle que

$$u(\varphi) = \int_0^{+\infty} u_t(\varphi(t,.))\,dt.$$

En particulier, $u$ et toutes ses dérivées par rapport à $t$ possèdent des traces en $t = 0+$. Posons

$$\underline{u}(\varphi) = \int_0^{+\infty} u_t(\varphi(t,.))\,dt$$

pour tout $\varphi \in D(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$.

Si $\psi \in D(]0,+\infty[)$ et $\phi \in D(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\begin{aligned}((-\Delta + D_t^2)u)(\psi \otimes \phi) &= \int_0^{+\infty} u_t((-\Delta + D_t^2)(\psi \otimes \phi))\,dt \\ &= \int_0^{+\infty} (-u_t(\Delta\phi)\psi(t) + u_t(\phi)D_t^2\psi(t))\,dt \\ &= \int_0^{+\infty} (-u_t(\Delta\phi) + D_t^2 u_t(\phi))\psi(t)\,dt.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$-u_t(\Delta\phi) + D_t^2 u_t(\phi) = f_t(\phi)$$

pour tout $t > 0$. Cela étant, pour tout $\varphi \in D(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ on a

$$\begin{aligned}((-\Delta + D_t^2)\underline{u})(\varphi) &= \int_0^{+\infty} u_t((-\Delta + D_t^2)\varphi(t,.))\,dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left[D_t\left[u_t(D_t\varphi(t,.)) - D_t u_t(\varphi(t,.))\right] + f_t(\varphi(t,.))\right]\,dt \\ &= -u_0(D_t\varphi(0,.) + u_1(\varphi(0,.)) + \underline{f}(\varphi).\end{aligned}$$

De là

$$(-\Delta + D_t^2)\underline{u} = \delta_0' \otimes u_0 + \delta_0 \otimes u_1 + \underline{f}.$$

Les distributions $\underline{u}$ et $E_n$ sont composables donc

$$\underline{u} = E_n * (\delta_0' \otimes u_0 + \delta_0 \otimes u_1 + \underline{f}).$$

En utilisant le fait que $E_n$ et $f$ sont à trace, on obtient

$$u_t = E_n(t) * u_1 + D_t E_n(t) * u_0 + \int_0^t E_n(t-s) * f_s\,ds.$$

Considérons le cas où $n = 3$, $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^3)$, $u_1 \in C^0(\mathbb{R}^3)$ et $f \in C^0([0,+\infty[\times\mathbb{R}^3)$. On a

$$E_3(t)(\varphi) = \frac{t}{4\pi} \int_{|\omega|=1} \varphi(t\omega)\,d\sigma(\omega)$$

donc

$$\begin{aligned}(E_3(t) * u_1)(\varphi) &= \frac{t}{4\pi} \int_{|\omega|=1} d\sigma(\omega) \int u_1(x)\varphi(x + t\omega)\,dx \\ &= \frac{t}{4\pi} \int \varphi(x)\,dx \int_{|\omega|=1} u_1(x + t\omega)\,d\sigma(\omega),\end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
(D_t E_3(t) * u_0)(\varphi) &= \frac{1}{4\pi}\int_{|\omega|=1} D_t[t\int u_0(x)\varphi(x+t\omega)\,dx]\,d\sigma(\omega) \\
&= \frac{1}{4\pi}\int \varphi(x) D_t[t\int_{|\omega|=1} u_0(x+t\omega)\,d\sigma(\omega)]\,dx.
\end{aligned}
$$

D'autre part

$$
\begin{aligned}
(E_3 * f)(\varphi) &= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{dy}{|y|}\int_0^{+\infty} dt\int_{\mathbb{R}^3} f(t,x)\varphi(t+|y|,x+y)\,dtdx \\
&= \frac{1}{4\pi}\int \varphi(t,x)\,dtdx\int_{|y|\le t}\frac{f(t-|y|,x-y)}{|y|}\,dy.
\end{aligned}
$$

On obtient ainsi la formule de Kirchoff

$$
\begin{aligned}
u(t,x) &= \frac{1}{4\pi}\int_{|\omega|=1}[u_0(x+t\omega)+tu_1(x+t\omega)+t\sum_{j=1}^n \omega_j D_{x_j} u_0(x+t\omega)]\,d\sigma(\omega) \\
&+\frac{1}{4\pi}\int_{|y|<t}\frac{f(t-|y|,x-y)}{|y|}\,dy.
\end{aligned}
$$

### 5.7.4 Solution de Green

Considérons un problème posé dans un demi-espace avec la condition de Dirichlet au bord. Pour simplifier, nous nous limitons au cas où les données de Cauchy sont nulles. Soit $a>0$. Cherchons une distribution $u \in D'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1}\times]-\infty,a[)$ solution de

$$
\begin{cases}
(-\Delta + D_t^2)u = \delta \quad \text{dans } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1}\times]-\infty,a[ \\
u_{|x_n=a} = 0,\ \ u_{|t<0} = 0
\end{cases}
$$

Le théorème A.0.4 est ici applicable à la variable $x_n$ au voisinage de $a$. Si $\underline{u}$ est le prolongement de $u$ par 0 dans $x_n > a$ et $v = D_{x_n} u_{|x_n=a}$, on a

$$(-\Delta + D_t^2)\underline{u} = \delta + v\otimes\delta_a$$

donc

$$\underline{u} = E_n + E_n * (v\otimes\delta_a).$$

En calculant formellement la transformée de Fourier partielle inverse par rapport à $t, x'$, on trouve

$$\hat{u}(\tau,\xi',x_n) = \frac{1}{2}\Big(\frac{e^{-|x_n|\sqrt{|\xi'|^2-(\tau-i0)^2}}}{\sqrt{|\xi'|^2-(\tau-i0)^2}} - \hat{v}(\tau,\xi')\frac{e^{-(a-x_n)\sqrt{|\xi'|^2-(\tau-i0)^2}}}{\sqrt{|\xi'|^2-(\tau-i0)^2}}\Big)$$

si $x_n < a$ et $n > 1$. Vu la condition limite, on doit avoir

$$\check{v}(\tau,\xi') = e^{-a\sqrt{|\xi'|^2-(\tau-i0)^2}}.$$

Ainsi
$$u(t,x) = E_n(t,x) - E_n(t, x - 2ae_n).$$

Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que

$$u(\varphi) = E_n(\varphi) - E_n(\varphi(\cdot, \cdot + 2ae_n))$$

est effectivement solution du problème considéré. Le support de cette solution met clairement en évidence le phénomène de réflexion sur le bord.

### 5.7.5 Solution de Poisson

Considérons un problème avec une condition de Dirichlet non homogène. Cherchons $u \in D'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \times ]0, +\infty[)$ qui vérifie

$$\begin{cases} (-\Delta + D_t^2)u = 0 \ \text{ dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \times ]0, +\infty[ \\ u_{|x_n=0} = \delta, \ u_{|t<0} = 0 \end{cases}$$

Si $\underline{u}$ est le prolongement de $u$ par 0 dans $x_n < 0$ et $v = D_{x_n} u_{|x_n=0}$, on a

$$(-\Delta + D_t^2)\underline{u} = -\delta(t, x') \otimes \delta'(x_n) - v(t, x') \otimes \delta(x_n)$$

donc
$$\underline{u} = -D_{x_n} E_n - E_n * (v \otimes \delta).$$

En prenant la transformée de Fourier inverse partielle par rapport à $(t, x')$, on obtient, si $x_n > 0$,
$$\hat{u}(\tau, \xi', x_n) = \frac{1}{2}\,(e^{-x_n \sqrt{|\xi'|^2 - (\tau - i0)^2}} - \hat{v}(\tau, \xi') \frac{e^{-x_n \sqrt{|\xi'|^2 - (\tau - i0)^2}}}{\sqrt{|\xi'|^2 - (\tau - i0)^2}}).$$

Vu la condition limite, on a

$$\hat{v}(\tau, \xi') = -\sqrt{|\xi'|^2 - (\tau - i0)^2}$$

et
$$\hat{u}(\tau, \xi', x_n) = e^{-x_n \sqrt{|\xi'|^2 - (\tau - i0)^2}}.$$

Ainsi
$$u = -2 D_{x_n} E_n.$$

# Appendix A

# Le théorème des traces

La trace d'une distribution sur une hypersurface n'est en général pas définie. L'objet de cet appendice est de montrer que des traces peuvent être définies pour les solutions d'équations aux dérivées partielles non caractéristiques par rapport à l'hypersurface. Ce résultat permet de poser des problèmes aux limites avec des données frontière dans le cadre des distributions.

**Définition A.0.3** *Soit* $U$ *un ouvert de* $\mathbb{R}^{n-1}$ *et* $T > 0$*. Une distribution* $u \in D'(U \times ]0,T[)$ *est dite à trace dans* $U \times [0,T[$ *s'il existe une fonction* $[0,T[ \to D'(U) : x_n \mapsto u_{x_n}$ *telle que* $x_n \mapsto u_{x_n}(\varphi')$ *soit de classe* $C_\infty$ *dans* $[0,T[$ *pour tout* $\varphi' \in D(U)$ *et*

$$u(\varphi) = \int_0^T u_{x_n}(\varphi(.,x_n))\, dx_n$$

*pour tout* $\varphi \in D(U \times ]0,T[)$.

Etablissons quelques résultats auxiliaires liés à cette définition.

a) *Une fonction* $[0,T[ \to D'(U) : x_n \mapsto u_{x_n}$ *est dite de classe* $C^p$ *si* $x_n \mapsto u_{x_n}(\varphi')$ *est de classe* $C^p$ *dans* $[0,T[$ *pour tout* $\varphi' \in D(U)$. Pour tout $j \leq p$, les formes linéaires

$$D(U) \ni \varphi' \mapsto (D^j_{x_n} u_{x_n})(\varphi') = D^j_{x_n}[u_{x_n}(\varphi')]$$

sont alors des distributions en vertu du théorème 1.21.

*Si* $x_n \mapsto u_{x_n}$ *est de classe* $C^p$ *dans* $[0,T[$ *alors* $x_n \mapsto u_{x_n}(\varphi(.,x_n))$ *est de classe* $C^p$ *dans* $[0,T[$ *pour tout* $\varphi \in D(U \times ]-T,T[)$*. On a*

$$D_{x_n}[u_{x_n}(\varphi(.,x_n))] = (D_{x_n} u_{x_n})(\varphi(.,x_n)) + u_{x_n}(D_{x_n}\varphi(.,x_n))$$

*et*

$$u : \varphi \mapsto \int_0^T u_{x_n}(\varphi(.,x_n))\, dx_n$$

*est une distribution dans* $U \times ]-T,T[$.

Par le théorème de Banach-Steinhaus, pour tout compact $K$ de $U$ et tout $S \in [0, T[$, il existe $C > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que

$$|u_{x_n}(\varphi')| \leq C \sup_{|\alpha'| \leq m} \sup_K |D^{\alpha'} \varphi'|$$

si $\varphi' \in D(K)$, $x_n \in [0, S]$.

Montrons que la fonction $F : (x_n, y_n) \mapsto u_{x_n}(\varphi(., y_n))$ est de classe $C^p$ dans $[0, T[^2$. Soit $(s, t) \in [0, T[^2$. Ecrivons

$$u_{x_n}(\varphi(., y_n) - u_s(\varphi(., t)) = u_{x_n}(\varphi(., y_n) - \varphi(., t)) + u_{x_n}(\varphi(., t)) - u_s(\varphi(., t)).$$

Il existe un compact $K$ de $U$ et $S > 0$ tels que $[\varphi] \subset K \times [-S, S]$. Ainsi, vu l'inégalité précédente,

$$|u_{x_n}(\varphi(., y_n) - u_s(\varphi(., t))|$$
$$\leq C \sup_{|\alpha'| \leq m} \sup_{x' \in K} |D^{\alpha'}_{x'}(\varphi'(x', y_n) - \varphi(x', t))| + |u_{x_n}(\varphi(., t)) - u_s(\varphi(., t))|$$

tend vers 0 si $(x_n, y_n)$ converge vers $(s, t)$. Si $p > 0$, la fonction $F$ est dérivable dans $]0, T[^2$ en vertu du théorème 1.16. Ses dérivées sont continues vu ce qui précède. En itérant ce raisonnement, on voit que $F$ est de classe $C^p$. La règle de dérivation annoncée résulte du théorème de dérivation des fonctions composées.

Montrons que $u$ est une distribution. Soit $K$ un compact de $U$ et $S \in [0, T[$. Si $\varphi \in D(U \times [-S, S])$, on a, en utilisant l'inégalité déduite du théorème de Banach-Steinhaus,

$$\left|\int_0^T u_{x_n}(\varphi(., x_n))\, dx_n\right| \leq CS \sup_{|\alpha'| \leq m} \sup_{K \times [0,S]} |D^{\alpha'}_{x'} \varphi|.$$

D'où la conclusion.

b) *Si $x_n \mapsto u_{x_n}$ est continu et*

$$\int_0^T u_{x_n}(\varphi(., x_n))\, dx_n = 0$$

*pour tout $\varphi \in D(U \times ]0, T[)$ alors $u_{x_n} = 0$ pour tout $x_n$.* De fait, pour tout $\varphi' \in D(U)$ et tout $\psi \in D(]0, T[)$, on a

$$\int_0^T u_{x_n}(\varphi')\psi(x_n)\, dx_n = 0.$$

Ainsi $u_{x_n}(\varphi') = 0$ pour tout $\varphi' \in D(U)$ et $x_n \in ]0, T[$.

c) *Si $u \in D'(U \times ]0, T[)$ vérifie $D^m_{x_n} u = 0$ alors il existe $u_0, \ldots u_{m-1} \in D'(U)$ tels que*

$$u(\varphi) = \int_0^T \left(\sum_{j=0}^{m-1} \frac{x_n^j}{j!} u_j\right)(\varphi(., x_n))\, dx_n.$$

Procédons par récurrence sur l'ordre de dérivation $m$. Supposons tout d'abord $m = 1$. Si $\varphi \in D(U \times ]0, T[)$ est tel que

$$\int_0^T \varphi(x', x_n)\, dx_n = 0$$

pour tout $x' \in U$ alors $u(\varphi) = 0$. De fait,

$$u(\varphi) = -(D_{x_n} u)_{(x)}(\int_0^{x_n} \varphi(x', x_n)\, dx_n) = 0.$$

Soit $\psi \in D(]0,T[)$ une fonction d'intégrale égale à 1. Pour tout $\varphi \in D(U\times]0,T[)$, il vient

$$0 = u_{(x)}(\varphi(x) - \psi(x_n) \int_0^T \varphi(x', s)\, ds)$$

donc

$$u(\varphi) = \int_0^T u_{(x)}(\varphi(x', s)\psi(x_n))\, ds.$$

On peut prendre $u_0(\varphi') = u(\varphi' \otimes \psi)$. Supposons le résultat acquis pour une dérivée d'ordre $m-1$ et $D^m_{x_n} u = 0$. On a $D_{x_n} D^{m-1}_{x_n} u = 0$ donc il existe $u_{m-1} \in D'(U)$ tel que

$$D^{m-1}_{x_n} u(\varphi) = \int_0^T u_{m-1}(\varphi(., x_n)\, dx_n.$$

La distribution

$$v(\varphi) = u(\varphi) - \int_0^T \frac{x_n^{m-1}}{(m-1)!} u_{m-1}(\varphi(., x_n))\, dx_n$$

est annulée par $D^{m-1}_{x_n}$. On conclut en utilisant l'hypothèse de récurrence.

d) Soit $[0,T[\to D'(U) : x_n \mapsto u_{x_n}$ une fonction continue. Définissons $D^k_{x_n} u_{x_n}$ pour tout entier $k \leq 0$ par la formule de récurrence

$$D^0_{x_n} u_{x_n} = u_{x_n} \quad , \quad D^{k-1}_{x_n} u_{x_n}(\varphi') = \int_0^{x_n} D^k_s u_s(\varphi')\, ds.$$

Avec cette notation, *si* $u_{x_n}$ *est de classe* $C^p$, $k \in \mathbb{Z}$ et $p - k \geq 0$ *alors* $D^k_{x_n} u_{x_n}$ *est de classe* $C^{p-k}$ *et*

$$\int_0^T u_{x_n}(\varphi(., x_n))\, dx_n = (-1)^j \int_0^T D^{-j}_{x_n} u_{x_n}(D^j_{x_n} \varphi(., x_n))\, dx_n$$

*si* $\varphi \in D(U\times]-T,T[)$ *et* $j \geq 0$.

C'est immédiat en intégrant par parties car

$$u_{x_n}(\varphi(., x_n)) = D_{x_n}[(D^{-1}_{x_n} u)(\varphi(., x_n))] - (D^{-1}_{x_n} u)(D_{x_n} \varphi(., x_n)).$$

e) *Une distribution* $u$ *est à trace dans* $U \times [0,T[$ *si et seulement si elle est à trace dans* $V \times [0,S[$ *pour tout* $0 < S < T$ *et tout ouvert* $V$ *d'adhérence compacte dans* $U$.

Le théorème que nous avons en vue est le suivant.

**Théorème A.0.4** *Soit* $U$ *un ouvert de* $\mathbb{R}^{n-1}$, $T > 0$, $u \in D'(U\times]0,T[)$ *une distribution prolongeable dans* $U\times]-T,T[$ *et*

$$L(x, D) = a_m(x) D^m_{x_n} + \sum_{k<m} L_k(x, D') D^k_{x_n}$$

*un opérateur de dérivation dont les coefficients sont de classe* $C_\infty$ *dans* $U\times]-T,T[$. *Si* $a_m$ *ne s'annule pas dans* $U \times [0,T[$ *et* $Lu$ *est à trace dans* $U \times [0,T[$ *alors* $u$ *est à trace dans* $U \times [0,T[$.

*Preuve.* Soit $V$ un ouvert d'adhérence compacte dans $U$ et $0 < S < T$. Par le théorème 1.18, il existe une fonction $f$ continue dans $\mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tels que

$$u(\varphi) = \int f(x) D^\alpha \varphi(x)\, dx \quad \text{si} \quad \varphi \in D(V \times ]0, S[).$$

Posons

$$F_{x_n}(\varphi') = \int_V f(x', x_n) D_{x'}^{\alpha'} \varphi'(x')\, dx'$$

pour tout $\varphi' \in D(V)$. On a

$$u(\varphi) = \int_0^S F_{x_n}(D_{x_n}^{\alpha_n} \varphi(., x_n))\, dx_n$$

si $\varphi \in D(V \times ]0, S[)$.

Montrons que pour tout opérateur de dérivation $P(x, D)$ à coefficients de classe $C_\infty$ dans $V \times [0, S[$, il existe une fonction continue $v_{x_n}$ telle que

$$Pu(\varphi) = \int_0^S v_{x_n}(D_{x_n}^{\alpha_n + m - 1} \varphi(., x_n))\, dx_n$$

pour tout $\varphi \in D(V \times ]0, S[)$.

Procédons par récurrence sur l'ordre maximal de dérivation par rapport à $x_n$. Si

$$P(x, D) = \sum_{k<m} P_k(x, D') D_{x_n}^k$$

est d'ordre strictement inférieur à $m$, on a

$$\begin{aligned} Pu(\varphi) &= \int_0^S F_{x_n}(D_{x_n}^{\alpha_n}{}^t P\varphi(., x_n))\, dx_n \\ &= \int_0^S \sum_{k<m+\alpha_n} F_{x_n}(Q_k(x, D') D_{x_n}^k \varphi(., x_n))\, dx_n \\ &= \int_0^S \sum_{k<m+\alpha_n} D_{x_n}^{k-m+1-\alpha_n}({}^t Q_k(x, D') F_{x_n})(D_{x_n}^{\alpha_n+m-1} \varphi(., x_n))\, dx_n. \end{aligned}$$

Dans ce cas, on peut donc prendre

$$v_{x_n} = \sum_{k<m+\alpha_n} D_{x_n}^{k-m+1-\alpha_n}({}^t Q_k(x, D') F_{x_n}).$$

Supposons le résultat acquis lorsque le degré de $P$ par rapport à $D_{x_n}$ est au plus $d-1$. Si $P$ est de degré $d$ par rapport à $D_{x_n}$, il existe un opérateur $Q(x, D)$ et un opérateur $R(x, D)$ de degré au plus égal à $d-1$ par rapport à $D_{x_n}$ tels que $P = QL + R$. Vu l'hypothèse de récurrence, on peut écrire

$$\begin{aligned} (Pu)(\varphi) &= (QLu)(\varphi) + (Ru)(\varphi) \\ &= \int_0^S (Lu)_{x_n}({}^t Q(x, D)\varphi(., x_n))\, dx_n + \int_0^S v_{x_n}(D_{x_n}^{\alpha_n+m-1} \varphi(., x_n))\, dx_n \\ &= \int_0^S \sum_{(k)} D_{x_n}^k (Lu)_{x_n}(Q_k(x, D')\varphi(., x_n))\, dx_n + \int_0^S v_{x_n}(D_{x_n}^{\alpha_n+m-1} \varphi(., x_n))\, dx_n \end{aligned}$$

si

$$^tQ(x,D) = \sum_{(k)} (-D_{x_n})^k Q_k(x,D').$$

Cela étant, pour tout $j \geq \alpha_n + m - 1$, il existe une fonction continue $u_{x_n}^{(j)}$ telle que

$$(D_{x_n}^j u)(\varphi) = \int_0^S u_{x_n}^{(j)} (D_{x_n}^{\alpha_n+m-1}\varphi(.,x_n))\, dx_n$$

$$= (-1)^{j-\alpha_n-m+1} \int (D_{x_n}^{\alpha_n+m-1-j} u_{x_n}^{(j)})(D_{x_n}^j \varphi(.,x_n))\, dx_n.$$

En utilisant le point c) ci-dessus, on obtient des distributions $u_{j,k}$ telles que

$$u(\varphi) = \int_0^S ((-1)^{\alpha_n+m-1} D_{x_n}^{\alpha_n+m-1-j} u_{x_n}^{(j)} + \sum_{k<j} \frac{x_n^k}{k!} u_{j,k})(\varphi(.,x_n))\, dx_n.$$

Par construction, la fonction

$$x_n \mapsto (-1)^{\alpha_n+m-1} D_{x_n}^{\alpha_n+m-1-j} u_{x_n}^{(j)} + \sum_{k<j} \frac{x_n^k}{k!} u_{j,k}$$

est de classe $C^{j-\alpha_n-m+1}$ dans $[0,S[$. Par le point b) elle est indépendante de $j$ donc de classe $C_\infty$. Ceci achève la démonstration. $\square$

# Table des matières

# Références

[1] Adams, *Sobolev spaces*, Academic Press 1975.

[2] Bastin F., Schneiders J.-P., *Cahier d'exercices d'analyse, 2CM*, 1993.

[3] Dautray R. et Lions J.L., *Analyse mathématique et calcul numérique 1,2,3*, Masson, 1987.

[4] Egorov Yu. V. et Shubin M.A., *Partial Differential Equations I*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Volume 30, Springer, 1992.

[5] Hörmander L., *The analysis of linear partial differential equations*, Springer, 1983-1984.

[6] Schwartz L., *Théorie des distributions*, Hermann, 1950.

[7] Taylor M. E. *Partial Differential equations*, Applied Mathematical Sciences 115, 116,117, Springer, 1997.

# EDP 2006-2007

Exercices

5 Février 2007

Nous reprenons les définitions et notations du cours.

## 1 Chapitres 1 et 2

Exercice 1 a) Dans $D(\Omega)$, le produit de deux suites convergentes converge vers le produit des limites.

b) Tout élément de $D(\Omega)$ se prolonge en une fonction de $D(\mathbb{R}^n)$. Tout élément de $D(\mathbb{R}^n)$ est uniformément continu sur $\mathbb{R}^n$.

c) Si $f$ est localement intégrable sur $\Omega$ et si $\int f(x)\varphi(x)\ dx = 0$ pour tout $\varphi \in D(\Omega)$, alors $f$ est nul pp dans $\Omega$.

Exercice 2 Si $u, v$ sont deux distributions dans $\Omega$ telles que $u(\varphi) = v(\varphi)$ pour tout $I = \prod_{j=1}^n ]a_j, b_j[$ tel que $\prod_{j=1}^n [a_j, b_j] \subset \Omega$ et tout $\varphi \in D(I)$, alors $u = v$ dans $D'(\Omega)$.

Exercice 3 Si $f$ est localement intégrable dans $]a, b[$ et s'il existe une fonction localement intégrable $g$ dans $]a, b[$ telle que $Du_f = u_g$ (c'est-à-dire $Df$ est localement intégrable), alors $f$ est égal presque partout dans $]a, b[$ à une fonction continue.

De même, si $f$ est localement intégrable dans $]a, b[$ et s'il existe des fonctions localement intégrables $g, h$ dans $]a, b[$ telles que $Du_f = u_g$ et $D^2 u_f = u_h$ alors $f$ est égal presque partout dans $]a, b[$ à une fonction de classe $C_1$ dans $]a, b[$.

Exercice 4 Montrer que l'application

$$u : \ D(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{C} \qquad \varphi \mapsto u(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, x)\ dx$$

est une distribution dans $\mathbb{R}^2$ qui vérifie $(D_x + D_y)u = 0$.

Exercice 5 Soit $I = \prod_{j=1}^n ]a_j, b_j[ \subset \mathbb{R}^n$. Si $\varphi \in D(I)$ est tel que $\int \varphi(x)dx = 0$, alors il existe $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in D(I)$ tels que

$$\varphi = \sum_{j=1}^n D_{x_j} \varphi_j.$$

Exercice 6 Si $u \in D'(]a, b[)$ et si $f$ localement intégrable dans $]a, b[$ sont tels que $u(\varphi) = 0$ pour tout $\varphi \in D(]a, b[)$ tel que $\int_a^b f(x)\varphi(x)\ dx = 0$ alors il existe une constante $c$ telle que $u = u_{cf}$.

Exercice 7 Soit $m \in \mathbb{N}_0$. Il existe une distribution qui coïncide avec la distribution associée à $1/x^m$ dans $]0, +\infty[$.

Exercice 8 Il n'existe pas de distribution dans $\mathbb{R}$ qui coïncide avec la distribution associée à $e^{1/x}$ dans $]0,+\infty[$.

Exercice 9 Il existe une distribution $u$ dans $\mathbb{R}$ et une fonction $f \in C_\infty(]0,+\infty[)$ telles que $|f(x)| = e^{1/x}$ et telles que $u$ coïncide avec la distribution associée à $f$ dans $]0,+\infty[$.

Exercice 10 Si $u \in D'(\Omega)$ et $f \in C_\infty(\Omega)$, alors $[fu] \subset [u] \cap [f]$.

Exercice 11 Soit $u$ une distribution dans $\Omega$ et $f \in C_\infty(\Omega)$ tel que $[u] \cap [f]$ soit compact. Alors

$$(D^\alpha u)(f) = (-1)^\alpha u(D^\alpha f).$$

Si en outre $g \in C_\infty(\Omega)$ est tel que $[u] \cap [f]$ et $f = g$ dans un voisinage du support de $u$, alors $u(f) = u(g)$.

Exercice 12 Calculer la dérivée de la distribution associée à la fonction $f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$.

Exercice 13 Soient $\lambda \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}_0, \omega \in \mathbb{R}_0$. Soient aussi les fonctions $f, g, h$ données par

$$f(x) = Y(x)e^{\lambda x}, \quad g(x) = Y(x)\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}, \quad h(x) = Y(x)\frac{\sin(\omega x)}{\omega}.$$

Calculer

$$(D-\lambda)u_f, \quad D^m u_g, \quad (D^2+\omega^2)u_h.$$

Exercice 14 Déterminer la structure générale des distributions dans $\mathbb{R}$ dont le support est formé de deux points distincts.

Exercice 15 Résoudre dans $D'(\mathbb{R})$ ($v \in D'(\mathbb{R})$ est donné et $u$ est l'inconnue).

| | | |
|---|---|---|
| 1) $xu = 0$ | 2) $xu = 1$ | 3) $xu = \delta_0$ |
| 4) $xu = u$ | 5) $xu = v$ | 6) $x^2u + u = 0$ |
| 7) $x^2u = 0$ | 8) $x^2u = 1$ | 9) $x^2u = \delta_0$ |
| 10)$x^2u = vp(1/x)$ | 11) $xDu = \delta_0$ | 12) $xDu + u = 0$ |
| 13) $x^2Du + u = 0$ | | |

Exercice 16 Montrer que si $f$ est une fonction localement intégrable dans $\mathbb{R}^n_0$ pour laquelle il existe $C > 0$ tel que $|f(x)| \leq C/|x|^m$ si $|x| \geq 1$, alors il existe une distribution $u$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que

$$u(\varphi) = u_f(\varphi), \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n_0).$$

Exercice 17 Soient $u$ une distribution dans $\mathbb{R}^n$ et soit $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$. Montrer que l'on a

$$\varphi u = 0 \ \Rightarrow u(\varphi) = 0$$

mais que la réciproque est fausse.

Exercice 18 Soit $f$ une fonction localement intégrable dans $\mathbb{R}$.

a) Montrer que si $Du_f$ est une distribution associée à une fonction localement intégrable alors

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(.+h)-f(x)}{h}=Df$$

dans $D'(\mathbb{R})$.

b) Réciproquement, montrer que s'il existe une fonction localement intégrable $g$ telle que

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(.+h)-f(x)}{h}=g$$

dans $D'(\mathbb{R})$, alors $Du_f$ est associée à une fonction localement intégrable.

Exercice 19 Montrer qu'au sens distribution on a[1]

$$f(.+h)-f(.)=\int_0^1 (Df)(t+.)dt$$

pour $f$ localement intégrable tel que $Du_f$ soit associée à une fonction localement intégrable (notée $Df$).

Exercice 20 Soient les suites $f_m, g_m$ ($m\in\mathbb{N}_0$) définies par

$$f_m(x)=\begin{cases}0 & \text{si } |x|\geq 1/m\\ m^2 & \text{si } |x|<1/m\end{cases}\qquad g_m(x)=\begin{cases}0 & \text{si } |x|\geq 1/m\\ m & \text{si } |x|<1/m\end{cases}$$

Montrer que ces suites convergent vers 0 pp dans $\mathbb{R}$, que la suite $u_{f_m}$ ne converge pas dans $D'(\mathbb{R})$ et que la suite $u_{g_m}$ converge dans $D'(\mathbb{R})$ (vers $2\delta_0$).

Exercice 21 Soit $\psi\in D(\mathbb{R}^n)$. Pour tout $\varepsilon>0$, on pose $\psi_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}\psi(x/\varepsilon)$. Montrer qu'il existe une distribution $u$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que $u_{\psi_\varepsilon}\to u$ dans $D'(\mathbb{R}^n)$ et calculer cette distribution.

Exercice 22 Soit $\psi\in D(\mathbb{R}^n)$ tel que $\int x^\alpha\psi(x)\;dx=0$ si $|\alpha|<k$. Pour tout $\varepsilon>0$, on pose

$$u_\varepsilon(\varphi)=\varepsilon^{-n-k}\int\psi(x/\varepsilon)\varphi(x)\;dx,\quad \varphi\in D(\mathbb{R}^n).$$

Montrer qu'il existe une distribution $u$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que $u_\varepsilon\to u$ dans $D'(\mathbb{R}^n)$ et calculer cette distribution.

Exercice 23 Soit $k\in\mathbb{N}_0$. Pour tout naturel strictement positif $m$, soit la fonction $f_m(x)=m^ke^{imx}, x\in\mathbb{R}$. Montrer que la suite de distributions associée à ces fonctions converge dans $D'(\mathbb{R})$ vers une distribution $u$; déterminer $u$.

Exercice 24 Pour tout naturel strictement positif $m$, soit la fonction $f_m(x)=me^{imx}Y(x), x\in\mathbb{R}$. Montrer que la suite de distributions associée à ces fonctions converge vers une distribution et déterminer cette distribution.

Exercice 25 Pour tout $\varepsilon>0$, soient

$$f_\varepsilon^\pm(x)=\ln(x\pm i\varepsilon)=\ln|x\pm i\varepsilon|+i\arg(x\pm i\varepsilon),\quad x\in\mathbb{R};$$

[1]et comparer avec une exemple de l'introduction

$$g_\varepsilon^\pm(x) = \frac{1}{x \pm i\varepsilon}, \quad x \in \mathbb{R}; \quad h_\varepsilon^\pm(x) = \frac{\varepsilon}{\pi(x^2+\varepsilon^2)}, \quad x \in \mathbb{R}; \quad l_\varepsilon^\pm(x) = \frac{x}{x^2+\varepsilon^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Montrer que si

$$f^\pm(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } x > 0 \\ \ln|x| \pm i\pi & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

alors

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} u_{f_\varepsilon^\pm} = u_{f^\pm}$$

dans $D'(\mathbb{R})$.

b) Calculer la dérivée de $u_{f^\pm}$.

c) Montrer que

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} u_{g_\varepsilon^\pm} = \mp i\pi\delta_0 + pf(\frac{1}{x}).$$

En déduire que $\lim_{\varepsilon\to 0^+} u_{h_\varepsilon} = \delta_0$ et $\lim_{\varepsilon \to 0^+} u_{l_\varepsilon} = pf(\frac{1}{x})$.

Exercice 26 Pour tout $\varepsilon > 0$, on considère la fonction $f_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon}{2}|x|^{\varepsilon - 1}$, $x \in \mathbb{R}_0$. Montrer qu'au sens distribution, on a $\lim_{\varepsilon\to 0^+} u_{f_\varepsilon} = \delta_0$.

Exercice 27 Pour tous $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$f_t(x) = t \sin\left(t \left| |x|^2 - 1 \right|\right).$$

Examiner la limite suivante dans $D'(\mathbb{R}_0^2)$ et dans $D'(\mathbb{R}^2)$: $\lim_{t\to+\infty} u_{f_t}$.

## 2 Chapitres 3 et 4

Exercice 1 Soit $u$ une distribution dans $\mathbb{R}^n$ et soient $f, g$ deux fonctions de $C_\infty(\mathbb{R}^n)$. Démontrer que si $[u], [g]$ sont composables, alors $[fu]$ et $[g]$ sont composables.

Exercice 2 Soit $\rho \in D(\mathbb{R}^n)$ une fonction positive d'intégrale égale à 1. Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose

$$\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\rho(x/\varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Démontrer que

a) $\lim_{\varepsilon\to 0^+} u_{\rho_\varepsilon}(f) = f(0)$ pour tout $f \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$,

b) pour toute distribution $u$ dans $\mathbb{R}^n$, on a $\lim_{\varepsilon\to 0^+} u_{u*\rho_\varepsilon} = u$ au sens distribution.

Exercice 3 Calculer $D^2\delta_0 \, * \, u_{|x|}$.

Exercice 4 Soit $f(x) = \sin(e^x)$, $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la dérivée de $f$ définit une distribution tempérée mais que l'on n'a pas d'estimation du type $|Df(x)| \leq C(1+|x|)^N$.

Exercice 5 Soit $u$ une distribution tempérée.

a) Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, la distribution $D^\alpha u$ est aussi tempérée.

b) Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on a

$$\mathcal{F}^\pm(D^\alpha u) = (\mp i\xi)^\alpha \mathcal{F}^\pm u, \qquad D^\alpha(\mathcal{F}^\pm u) = (\pm i)^\alpha \mathcal{F}^\pm(x^\alpha u).$$

c) Montrer que si $u$ est associée à $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, alors la transformée de Fourier de $u$ est associée à la transformée de Fourier de $f$.

d) Si $u$ vérifie[2] $u(\varphi) = u(\widetilde{\varphi})$ (resp. $u(\varphi) = -u(\widetilde{\varphi})$) pour tout $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ alors la tranformée de Fourier de $u$ a la même propriété.

Exercice 6 Après avoir constaté que tout polynôme définit une distribution tempérée, calculer la transformée de Fourier d'un polynôme.

Exercice 7 Calculer la transformée de Fourier de la distribution associée à la fonction $f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$, après avoir montré que celle-ci définit bien une distribution tempérée.

Exercice 8 Calculer la transformée de Fourier de la distribution $pf(1/x)$, après avoir montré que celle-ci définit bien une distribution tempérée.

Exercice 9 Soit $u$ une distribution à support compact. Montrer que la fonction

$$f(\xi) = u_{(x)}\left(e^{i<x,\xi>}\right), \xi \in \mathbb{R}^n$$

est un élément de $C_\infty(\mathbb{R}^n)$.

Montrer ensuite que si $u, v$ sont deux distributions à support compact alors elles sont composables et leur produit de composition est une distribution tempérée vérifiant

$$\mathcal{F}^\pm(u * v) = u_{fg}$$

où

$$f(\xi) = u_{(x)}\left(e^{i<x,\xi>}\right),\ \xi \in \mathbb{R}^n, \qquad g(\xi) = v_{(x)}\left(e^{i<x,\xi>}\right),\ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Exercice 10 Si $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $v$ est une distribution tempérée, alors $v * g$ existe. Si en outre $v$ est à support compact, alors $v * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et on a $u_{\mathcal{F}^\pm(v*g)} = \mathcal{F}^\pm g\ \mathcal{F}^\pm v$.

Exercice 11 Montrer que la transformée de Fourier d'une distribution à support compact dans $\mathbb{R}$ existe toujours et que c'est même la distribution associée à une fonction de $C_\infty(\mathbb{R})$ qui se prolonge en une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$.

# 3 Chapitre 5

Exercice 1 Pour tout naturel strictement positif $m$, on définit $N_m$ comme le produit de composition de $m$ fois la fonction caractéristique de $[0, 1]$.

a) Montrer que $[N_m] \subset [0, m]$, que la restriction de $N_m$ à tout intervalle de type $[k, k+1]$ (avec $k$ entier) est un polynôme de degré $m-1$ et que, si $m \geq 2$, alors $N_m \in C_{m-2}(\mathbb{R})$.

b) Pour quelles valeurs de $s \in \mathbb{R}$ a-t-on $N_m \in H^s(\mathbb{R})$?

c) Calculer $D^{m-1}u_{N_m}$ et $D^m u_{N_m}$.

Exercice 2 Si $s > n/2$ et si $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, alors $u$ est la distribution associée à une fonction uniformémment continue sur $\mathbb{R}^n$ qui tend vers 0 à l'infini (donc est bornée).

[2] on dit respectivement que $u$ est pair, impair

Exercice 3 Soit $f$ la fonction définie par

$$f(\xi) = \frac{1}{(1+\xi^2)^{1/2}\Big(1+\ln(\sqrt{1+\xi^2})\Big)}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Montrer que la transformée de Fourier de la distribution associée à $f$ est dans $H^{1/2}(\mathbb{R})$ mais n'est pas intégrable.

Exercice 4 Soit $\alpha \in ]0,1[$. Pour quelles valeurs de $s \in \mathbb{R}$ la distribution associée à $1/|x|^\alpha$ est-elle dans $H^s(\mathbb{R})$?

Exercice 5 Soient $s$ un réel et $k$ un réel non nul. Montrer que pour tout $f \in H^s(\mathbb{R}^n$ il existe une unique distribution $u \in H^{s+2}(\mathbb{R}^n)$ telle que $(-\Delta + k^2)u = f$.

Exercice 6 Montrer que la loi

$$u: \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^2) \ \mapsto \frac{1}{2}\int_{t\geq|x|} \varphi(t,x)dtdx$$

définit une distribution dans $\mathbb{R}^2$ qui vérifie $(D_t^2 - D_x^2)u = \delta_0$.

EXEMPLES DE QUESTIONS d'EXAMENS (exercices)

2003-2004

1. Calculer (si elle existe) la limite dans $D'(\mathbb{R})$ de la suite de distributions $u_m$ $(m \in \mathbb{N}_0)$, associées aux fonctions
$$f_m(x) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} e^{-mx^2},\ x \in \mathbb{R}.$$

2. Montrer que la distribution $u$ associée à la fonction $f(x) = \sin x\ \chi_{[0,+\infty[}(x),\ x \in \mathbb{R}$, vérifie
$$D^2u + u = \delta_0 \qquad \text{dans} \quad D'(\mathbb{R}).$$

3. Montrer que la fonction
$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } x > 0 \\ \ln(|x|) + i\pi & \text{si } x < 0. \end{cases}$$
définit bien une distribution $u_f$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer ensuite la distribution $Du_f$.

4. Montrer directement que la loi
$$u:\ \varphi \in D(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \varphi(m)$$
est une distribution tempérée.

5. Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose $u_\varepsilon = \frac{\delta_\varepsilon - \delta_{-\varepsilon}}{\varepsilon}$. Montrer que ces distributions convergent dans $D'(\mathbb{R})$ si $\varepsilon \to 0^+$ vers une distribution $u$ à déterminer également. Cette distribution $u$ est-elle la distribution associée à une fonction localement intégrable? Pourquoi?

6. Soit $a$ un réel fixé et soit $f(x) = e^{iax}$. Calculer les transformées de Fourier de la distribution associée à la fonction $f$.

7. Démontrer que
$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \varphi(m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}^+_{2\pi m}\varphi, \quad \varphi \in D(\mathbb{R}).$$

2004-2005

1. On se place dans $\mathbb{R}$. Si $u$ est la distribution associée à la fonction constante 1 et si $v = D\delta_0$ (dérivée de la distribution de Dirac), calculer (si possible) la composée de $u$ et $v$.

2. On considère les lois
$$u\ :\ \varphi \in D(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{m=-\infty}^{+\infty} m\varphi(m), \quad v\ :\ \varphi \in D(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \varphi(2\pi m).$$

- Montrer que $u$ et $v$ sont des distributions tempérées.
- Déterminer le support de $u$.
- Calculer la transformée de Fourier $\widehat{u}$ de $u$ et montrer que l'on a $i\widehat{u} = 2\pi Dv$.

3. Soit
$$f(x) = \begin{cases} 2xe^x & \text{si } x \leq 0 \\ xe^x & \text{si } x > 0. \end{cases}$$
Si $u$ désigne la distribution associée à $f$ et si $P$ est l'opérateur de dérivation $P(D) = D^2 - 2D + 1$, calculer la distribution
$$P(u * \delta_1).$$

4. On se place dans $\mathbb{R}$. Si $u$ est la distribution associée à la fonction $\chi_{]0,+\infty[}$ et si $v = D\delta_0$ (dérivée de la distribution de Dirac), calculer (si possible) la composée de $u$ et $v$.

5. On considère la loi
$$u\ :\ \varphi \in D(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2}\varphi(m).$$
- Montrer que $u$ est une distribution tempérée.
- Déterminer le support de $u$.
- Calculer la transformée de Fourier $\widehat{u}$ de $u$ et montrer que cette transformée est associée à une fonction de classe $C_\infty$ dans $\mathbb{R}$ qui se prolonge en une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$.

6. Pour tout naturel positif ou nul $m$, on définit l'espace de Sobolev d'ordre $m$ dans $]-1,1[$ comme étant l'espace des fonctions de $L^2(]-1,1[)$ dont les dérivées jusqu'à l'ordre $m$ sont associées à des fonctions de $L^2(]-1,1[)$, c'est-à-dire l'espace
$$H^m(]-1,1[) = \left\{f \in L^2(]-1,1[) : D^k u_f = \text{distr. associée à une fonction de } L^2(]-1,1[), \forall k = 0, \ldots, m\right\}.$$
Montrer que la fonction $f(x) = x + |x|,\ x \in ]-1,1[$, appartient à $H^1(]-1,1[)$ mais pas à $H^2(]-1,1[)$.

7. Calculer (si elle existe) la limite dans $D'(\mathbb{R})$ de la suite de distributions $u_m$ $(m \in \mathbb{N}_0)$, associées aux fonctions
$$f_m(x) = \sqrt{\frac{m}{\pi}}e^{-mx^2},\ x \in \mathbb{R}.$$

8. Montrer que la distribution $u$ associée à la fonction $f(x) = \sin x\ \chi_{[0,+\infty[}(x),\ x \in \mathbb{R}$, vérifie
$$D^2u + u = \delta_0 \qquad \text{dans} \quad D'(\mathbb{R}).$$

9. Montrer que la fonction
$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } x > 0 \\ \ln(|x|) + i\pi & \text{si } x < 0. \end{cases}$$
définit bien une distribution $u_f$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer ensuite la distribution $Du_f$.

10. Montrer directement que la loi
$$u :\ \varphi \in D(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \varphi(m)$$
est une distribution tempérée.

$\boxed{\text{2005-2006}}$

1. Parmi les applications $u, v, w$ suivantes, lesquelles sont des distributions? Lesquelles sont des distributions tempérées? Justifier vos réponses.
   a) $u(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi^2(x)\ dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.
   b) $v(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \ln(|x|)\varphi(x)\ dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.
   c) $w(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} e^x \varphi(x)\ dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

2. Calculer (si elle existe) la limite dans $D'(\mathbb{R})$ de la suite de distributions $u_m$ $(m \in \mathbb{N}_0)$, associées aux fonctions
$$f_m(x) = \frac{m}{\sqrt{\pi}} e^{-m^2x^2},\ x \in \mathbb{R}.$$

3. Montrer que les expressions suivantes ont un sens et les comparer
$$(u_1 * D\delta_0) * u_Y, \quad u_1 * (D\delta_0 * u_Y)$$
($\delta_0$ est la distribution de Dirac en 0; $u_1$ est la distribution associée à la fonction constante 1 et $u_Y$ est la distribution associée à la fonction caractéristique de l'intervalle $]0, +\infty[$).

4. On définit les lois $u$ et $v$ sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ par
$$u(\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left( \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right),\ v(\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left( \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx \ - \ 2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon} \right).$$
   a) Montrer que $u$ et $v$ sont des distributions dans $\mathbb{R}$.
   b) Les comparer aux dérivées de la distribution dans $\mathbb{R}$ associée à la fonction $x \mapsto \ln|x|$.
   c) La distribution $u$ est-elle associée à une fonction localement intégrable? Pourquoi?