

LISTE 2 : DISTRIBUTIONS À SUPPORT PONCTUEL, ÉQUATIONS DANS $\mathcal{D}'(\Omega)$

Rappel :

► Si u est une distribution dans un ouvert Ω de \mathbb{R}^n dont le support est réduit à un point $x_0 \in \Omega$, alors il existe un entier k et des uniques constantes c_α , $|\alpha| \leq k$, telles que

$$u = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha D^\alpha \delta_{x_0}.$$

Exercice 1. Déterminer la structure générale des distributions dans \mathbb{R} dont le support est formé de deux points distincts de \mathbb{R} .

Exercice 2. Déterminer les distributions u de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui vérifient les équations suivantes :

$$\begin{aligned} (a) \quad xu &= 2u & (b) \quad x^2u &= u \\ (c) \quad x^2u &= \delta_0 & (d) \quad x^2Du &= \delta_0. \end{aligned}$$

Exercice 3. Soient $p \in \mathbb{N}_0$ et $c \in \mathbb{C}$. Déterminer les distributions u de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui vérifient

$$(a) \quad D^p u = 0 \quad (b) \quad (D - c)^p u = 0.^1$$

Exercice 4. Soit $L(D) = \sum_{\alpha=0}^p c_\alpha D^\alpha$ un opérateur de dérivation linéaire à coefficients constants. La solution la plus générale de l'équation homogène $L(D)(u) = 0$ sur \mathbb{R} s'écrit

$$u = u_{P_{\alpha_1-1}(x)e^{a_1x} + \dots + P_{\alpha_m-1}(x)e^{a_mx}}$$

où

1. a_1, \dots, a_m sont les zéros distincts du polynôme $L(z) = \sum_{\alpha=0}^p c_\alpha z^\alpha$,
2. pour tout $j \leq m$, α_j est la multiplicité de a_j comme zéro de $L(z)$,
3. pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, $P_\alpha(x)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à α .

Exercice 5. Déterminer les distributions u de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui vérifient les équations suivantes :

$$(a) \quad D^2u - 2Du + u = 0 \quad (b) \quad Du + u = \delta_0 \quad (c) \quad D^2u = \delta_0.$$

Exercice 6. Si a et b sont deux complexes fixés, on considère l'opérateur différentiel

$$P = D^2 + aD + b.$$

Soient f et g deux fonctions de $C^2(\mathbb{R})$ telles que $(Pf)(x) = (Pg)(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = g(0)$ et $Df(0) - Dg(0) = 1$. On pose

$$h(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{si } x \leq 0 \\ -g(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

(6.1) Montrer que h définit une distribution u et calculer Pu dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(6.2) En déduire la solution la plus générale dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de l'équation

$$D^2u + 2Du - 3u = \delta_0.$$

1. Suggestion : Montrer que $D^p(e^{-cx}u) = e^{-cx}(D - c)^p u$ pour tout $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.