Liste 2 – Fonctions test, distributions, supports et dérivation

---

Rappels :

▶ On désigne par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de $C^\infty(\Omega)$ à support compact dans Ω. On dit qu'une suite $(\varphi_m)_m$ d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$ *converge dans* $\mathcal{D}(\Omega)$ *vers un élément* φ *de* $\mathcal{D}(\Omega)$ s'il existe un compact K de Ω tel que $[\varphi_m] \subset K$ pour tout m, $[\varphi] \subset K$ et

$$\sup_K |D^\alpha \varphi_m - D^\alpha \varphi| \to 0$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ lorsque $m \to +\infty$.

▶ Une *distribution* u dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ est une fonctionnelle linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que $u(\varphi_m)$ converge vers $u(\varphi)$ pour toute suite $(\varphi_m)_m$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ qui converge vers φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$. On désigne par $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions sur Ω. Dans la pratique, on utilise le critère de continuité suivant : Une fonctionelle linéaire $u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ est une distribution si et seulement si pour tout compact K inclus dans Ω, il existe $k \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que

$$|u(\varphi)| \leq C \sup_K \sup_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha \varphi| \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(K).$$

▶ Soit $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Un ouvert ω inclus dans Ω est *d'annulation pour* u si $u(\varphi) = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$. Le *support de* u, noté $[u]$, est le complémentaire dans Ω du plus grand ouvert d'annulation de u.

▶ Si $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $f \in C^\infty(\Omega)$, on définit les distributions $D^\alpha u$ et fu par

$$D^\alpha u(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} u(D^\alpha \varphi) \quad \text{et} \quad fu(\varphi) = u(f\varphi) \ , \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Exercice 1. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Examiner la convergence dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ des suites suivantes :

$$(a)\ \varphi_m(x) = \frac{\varphi(x)}{m} \qquad (b)\ \varphi_m(x) = \frac{\varphi(\frac{x}{m})}{m} \qquad (c)\ \varphi_m(x) = m\varphi(mx)$$

$$(d)\ \varphi_m(x) = m\varphi(\tfrac{x}{m}) \quad (e)\ \varphi_m(x) = \frac{\varphi(mx)}{m}.$$

Exercice 2. Parmi les applications suivantes, quelles sont celles qui définissent des distributions ? En déterminer alors le support.

(a) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto D\varphi(1)$ $\quad (b)$ $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto (\varphi(0))^2$ $\quad (c)$ $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \varphi(0) + D\varphi(1)$

(d) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\int_0^1 \varphi(x)dx$ $\quad (e)$ $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\int_0^1 |\varphi(x)|dx$ $\quad (f)$ $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}} \varphi(x)$

(g) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi(n)$ $\quad (h)$ $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi\left(\frac{1}{n}\right)$ $\quad (i)$ $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{1}{n}\right)$

(j) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\varphi\left(\frac{1}{n}\right)$ $\quad (k)$ $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{N} (D^n\varphi)(0)$ $\quad (l)$ $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (D^n\varphi)(0)$

(m) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (D^n\varphi)(n)$ $\quad (n)$ $\varphi \in \mathcal{D}(]0,+\infty[) \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (D^n\varphi)\left(\frac{1}{n}\right)$

Exercice 3. Simplifier au maximum les expressions suivantes dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

$$(a)\ e^{2x}\delta_0 + e^x D\delta_0,$$
$$(b)\ x^p D^q \delta_0 \quad \text{pour} \quad p, q \in \mathbb{N}.$$

Exercice 4. On donne $f(x) = x|x|$, $x \in \mathbb{R}$, et on considère la distribution u associée à f. Déterminer les dérivées d'ordre 1, 2 et 3 de u.

Exercice 5. Si $-1 < \lambda < 0$, montrer que la fonction

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} x^\lambda & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

définit une distribution sur $\mathbb{R}$ et en calculer sa dérivée.

Exercice 6. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Démontrer que la distribution de Dirac dans Ω n'est pas une distribution associée à une fonction localement intégrable sur Ω.

Exercice 7. Montrer qu'il n'existe pas de distribution u dans $\mathbb{R}$ qui coïncide avec $e^{1/x}$ sur $]0, +\infty[$, c'est-à-dire telle que

$$u(\varphi) = \int_0^{+\infty} e^{1/x} \varphi(x) dx \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(]0, +\infty[).$$