Liste 2 - Mars 2013

Rappel :

▶ Si u est une distribution dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ dont le support est réduit à un point $x_0 \in \Omega$, alors il existe un entier k et des uniques constantes c_α, $|\alpha| \leq k$, telles que

$$u = \sum_{|\alpha|\leq k} c_\alpha D^\alpha \delta_{x_0}.$$

Exercice 1. Déterminer la structure générale des distributions dans $\mathbb{R}$ dont le support est formé de deux points distincts de $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Déterminer les distributions u de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui vérifient les équations suivantes :

$$(a)\ xu = 2u \qquad (b)\ x^2u = u$$

$$(c)\ x^2u = \delta_0 \qquad (d)\ x^2Du = \delta_0.$$

Exercice 3. Soient $p \in \mathbb{N}_0$ et $c \in \mathbb{C}$. Déterminer les distributions u de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui vérifient

$$(a)\ D^pu = 0 \qquad (b)\ (D-c)^pu = 0.$$ [1]

Exercice 4. Soit $L(D) = \sum_{\alpha=0}^{p} c_\alpha D^\alpha$ un opérateur de dérivation linéaire à coefficients constants. La solution la plus générale de l'équation homogène $L(D)(u) = 0$ sur $\mathbb{R}$ s'écrit

$$u = u_{P_{\alpha_1-1}(x)e^{a_1x}+\ldots+P_{\alpha_m-1}(x)e^{a_mx}}$$

où

1. $a_1, ..., a_m$ sont les zéros distincts du polynôme $L(z) = \sum_{\alpha=0}^{p} c_\alpha z^\alpha$,
2. pour tout $j \leq m$, α_j est la multiplicité de a_j comme zéro de $L(z)$,
3. pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, $P_\alpha(x)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à α.

Exercice 5. Déterminer les distributions u de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui vérifient les équations suivantes :

$$(a)\ D^2u - 2Du + u = 0 \quad (b)\ Du + u = \delta_0 \quad (c)\ D^2u = \delta_0.$$

---

1. Suggestion : Montrer que $D^p(e^{-cx}u) = e^{-cx}(D-c)^pu$ pour tout $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.