Liste 3 – Distributions à support ponctuel et équations dans $\mathcal{D}'(\Omega)$

Rappel :

► Si u est une distribution dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ dont le support est réduit à un point $x_0 \in \Omega$, alors il existe un entier k et des uniques constantes c_α, $|\alpha| \leq k$, telles que

$$u = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha D^\alpha \delta_{x_0}.$$

Exercice 1. Déterminer la structure générale des distributions dans $\mathbb{R}$ dont le support est formé de deux points distincts de $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Déterminer les distributions u de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui vérifient les équations suivantes :

$$(a)\ xu = 2u \qquad (b)\ x^2u = u$$

$$(c)\ x^2u = \delta_0 \qquad (d)\ x^2Du = \delta_0.$$

Exercice 3. Soient $p \in \mathbb{N}_0$ et $c \in \mathbb{C}$. Déterminer les distributions u de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui vérifient

$$(a)\ D^p u = 0 \qquad (b)\ (D-c)^p u = 0.$$ [1]

Exercice 4. Soit $L(D) = \sum_{\alpha=0}^{p} c_\alpha D^\alpha$ un opérateur de dérivation linéaire à coefficients constants. La solution la plus générale de l'équation homogène $L(D)(u) = 0$ sur $\mathbb{R}$ s'écrit

$$u = u_{P_{\alpha_1 - 1}(x)e^{a_1 x} + \ldots + P_{\alpha_m - 1}(x)e^{a_m x}}$$

où

1. $a_1, \ldots, a_m$ sont les zéros distincts du polynôme $L(z) = \sum_{\alpha=0}^{p} c_\alpha z^\alpha$,
2. pour tout $j \leq m$, α_j est la multiplicité de a_j comme zéro de $L(z)$,
3. pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, $P_\alpha(x)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à α.

Exercice 5. Déterminer les distributions u de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui vérifient les équations suivantes :

$$(a)\ D^2u - 2Du + u = 0 \qquad (b)\ Du + u = \delta_0$$

$$(c)\ D^2u = \delta_0 \qquad (d)\ D^2u + 4u = \delta_0.$$

Exercice 6. Si a et b sont deux complexes fixés, on considère l'opérateur différentiel

$$P = D^2 + aD + b.$$

Soient f et g deux fonctions de $C^2(\mathbb{R})$ telles que $(Pf)(x) = (Pg)(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = g(0)$ et $Df(0) - Dg(0) = 1$. On pose

$$h(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{si} \quad x \leq 0, \\ -g(x) & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

(6.1) Montrer que h définit une distribution u et calculer Pu dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(6.2) En déduire la solution la plus générale dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de l'équation

$$D^2u + 2Du - 3u = \delta_0.$$

---

1. Suggestion : Montrer que $D^p(e^{-cx}u) = e^{-cx}(D-c)^p u$ pour tout $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.