Liste 3 - Mars 2012

Rappels :

▶ Si u est une distribution dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ dont le support est réduit à un point $x_0 \in \Omega$, alors il existe un entier k et des uniques constantes c_α, $|\alpha| \leq k$, telles que

$$u = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha D^\alpha \delta_{x_0}.$$

▶ Deux fermés F_1 et F_2 de $\mathbb{R}^n$ sont *composables* si pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$, $F_1 \cap (K - F_2)$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.

▶ Soient $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $f \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$. Si $[u]$ et $[f]$ sont composables, le *produit de composition de u et f* est la fonction $u * f$ définie dans $\mathbb{R}^n$ par

$$(u * f)(x) = \underset{(y)}{u}\big(f(x - y)\big).$$

▶ Soient $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Si $[u]$ et $[v]$ sont composables, le *produit de composition de u et v* est la distribution $u * v$ définie par

$$(u * v)(\varphi) = \underset{(x)}{u}\left(\underset{(y)}{v}\big(\varphi(x + y)\big)\right) \ , \ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Exercice 1. Déterminer la structure générale des distributions dans $\mathbb{R}$ dont le support est formé de deux points distincts de $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Déterminer les distributions u de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui vérifient les équations suivantes :

$$(a)\ xu = 2u \qquad (b)\ x^2 u = u$$
$$(c)\ x^2 u = \delta_0 \qquad (d)\ x^2 Du = \delta_0.$$

Exercice 3. Soient $p \in \mathbb{N}_0$ et $c \in \mathbb{C}$. Déterminer les distributions u de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui vérifient

$$(a)\ D^p u = 0 \quad (b)\ (D - c)^p u = 0.$$ [1]

Exercice 4. Soit $L(D) = \sum_{\alpha=0}^{p} c_\alpha D^\alpha$ un opérateur de dérivation linéaire à coefficients constants. La solution la plus générale de l'équation homogène $L(D)(u) = 0$ sur $\mathbb{R}$ s'écrit

$$u = u_{P_{\alpha_1 - 1}(x) e^{a_1 x} + \ldots + P_{\alpha_m - 1}(x) e^{a_m x}}$$

où

1. $a_1, ..., a_m$ sont les zéros distincts du polynôme $L(z) = \sum_{\alpha=0}^{p} c_\alpha z^\alpha$,
2. pour tout $j \leq m$, α_j est la multiplicité de a_j comme zéro de $L(z)$,
3. pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, $P_\alpha(x)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à α.

Exercice 5. Déterminer les distributions u de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui vérifient les équations suivantes :

$$(a)\ Du + u = 0 \quad (b)\ Du + u = \delta_0 \quad (c)\ D^2 u = \delta_0.$$

Exercice 6. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$. Montrer que la distribution $gD\delta_0$ et la fonction f sont composables et calculer leur produit de composition.

Exercice 7. Soient $a, b \in \mathbb{R}^n$. Si cela a un sens, calculer $\delta_a * \delta_b$.

Exercice 8. Montrer que les expressions suivantes ont un sens et les comparer :

$$(u_1 * D\delta_0) * u_Y \ , \quad u_1 * (D\delta_0 * u_Y)$$

Que peut-on en conclure ?

---

1. Suggestion : Montrer que $D^p(e^{-cx} u) = e^{-cx}(D - c)^p u$ pour tout $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.