Liste 4 - Produit de composition, distributions tempérées et tranformation de Fourier

---

Rappels :

▶ Deux fermés F_1 et F_2 de $\mathbb{R}^n$ sont *composables* si pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$, $F_1 \cap (K - F_2)$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.

▶ Soient $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $f \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$. Si $[u]$ et $[f]$ sont composables, le *produit de composition de u et f* est la fonction $u * f$ définie dans $\mathbb{R}^n$ par

$$(u * f)(x) = \underset{(y)}{u}\big(f(x-y)\big).$$

▶ Soient $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Si $[u]$ et $[v]$ sont composables, le *produit de composition de u et v* est la distribution $u * v$ définie par

$$(u * v)(\varphi) = \underset{(x)}{u}\left(\underset{(y)}{v}\big(\varphi(x+y)\big)\right)\ ,\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

▶ On désigne par $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions $f \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$p_{k,N}(f) = \sup_{|\alpha| \le k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^N |D^\alpha f(x)| < +\infty$$

pour tous $k, N \in \mathbb{N}$. Une telle fonction est dite *à décroissance rapide*.

▶ Une distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est dite *tempérée* s'il existe une constante $C > 0$ et des naturels k, N tels que $|u(\varphi)| \le C p_{k,N}(\varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. On désigne par $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des distributions tempérées dans $\mathbb{R}^n$.

▶ Si u est une distribution tempérée, la *transformée de Fourier de u*, notée $\mathcal{F}^{\pm}u$, est définie par

$$(\mathcal{F}^{\pm}u)(\varphi) = u(\mathcal{F}^{\pm}\varphi)\ ,\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

C'est une distribution tempérée et on a $\mathcal{F}^{\mp}\mathcal{F}^{\pm}u = (2\pi)^n u$.

▶ Soit $a > 0$. Une distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est *a-périodique* si $u(\varphi(.+a)) = u(\varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Toute distribution périodique est tempérée.

Exercice 1. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$. Montrer que la distribution $gD\delta_0$ et la fonction f sont composables et calculer leur produit de composition.

Exercice 2. Soient $a, b \in \mathbb{R}^n$. Si cela a un sens, calculer $\delta_a * \delta_b$.

Exercice 3. Montrer que les expressions suivantes ont un sens et les comparer :

$$(u_1 * D\delta_0) * u_Y\ , \quad u_1 * (D\delta_0 * u_Y)$$

Que peut-on en conclure ?

Exercice 4. Soit $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ une fonction positive d'intégrale égale à 1. Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose

$$\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),\ x \in \mathbb{R}^n\,.$$

Montrer que

1. $\lim_{\varepsilon \to 0^+} u_{\rho_\varepsilon}(f) = f(0)$ pour tout $f \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$.
2. pour tout $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $u * u_{\rho_\varepsilon}$ converge vers u dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ si $\varepsilon \to 0^+$.

Exercice 5. Soient u une distribution tempérée dans $\mathbb{R}$ et a un réel. On considère l'application

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto (u * \varphi)(a).$$

1. Montrer que cette application est une distribution.
2. Cette distribution est-elle tempérée ? Pourquoi ?

Exercice 6. On considère les fonctions définies dans $\mathbb{R}$ par

$$f_1(x) = c \ (c \in \mathbb{C}), \quad f_2(x) = x^n \ (n \in \mathbb{N}_0), \quad f_3(x) = e^x \quad \text{et} \quad f_4(x) = e^{iax} \ (a \in \mathbb{R}).$$

1. Les distributions associées sont-elles tempérées dans $\mathbb{R}$? Si oui, en calculer la transformée de Fourier.
2. En déduire que tout polynôme définit une distribution tempérée et en calculer la transformée de Fourier.

Exercice 7. Rappelons que la tranformée de Fourier de la distribution associée à la fonction $Y = \chi_{]0,+\infty[}$ est donnée par

$$\mathcal{F}^{\pm} u_Y(\varphi) = \pi\varphi(0) \pm i \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

En déduire l'expression de la transformée de Fourier de la valeur principale de $1/x$.

Exercice 8. On considère les lois

$$u : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{m\in\mathbb{Z}} m\varphi(m) \ , \quad v : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{m\in\mathbb{Z}} \varphi(2\pi m).$$

(8.1) Montrer que u et v sont des distributions tempérées.

(8.2) Calculer la transformée de Fourier $\mathcal{F}^{-}u$ de u et montrer que l'on a $\mathcal{F}^{-}u = 2i\pi Dv$.

Exercice 9. Soient les fonctionnelles définies sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ par

$$\varphi \mapsto \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi mx} \varphi(x) dx \quad \text{et} \quad \varphi \mapsto \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \varphi(m)$$

notées respectivement

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi mx} \quad \text{et} \quad \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta_m.$$

1. Comparer $\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi mx}$ et $\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta_m$.
2. En déduire que l'on a $2\pi \displaystyle\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta_{\mp 2\pi m} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}^{\pm}\delta_m$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.