

LISTE 4 – LIMITES DE DISTRIBUTIONS

Rappels :

► Une suite $(u_m)_m$ de $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge vers u dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ si pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} u_m(\varphi) = u(\varphi).$$

Exercice 1. Soient les suites f_m, g_m ($m \in \mathbb{N}_0$) définies par

$$f_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq \frac{1}{m} \\ m & \text{si } |x| < \frac{1}{m} \end{cases}$$

et

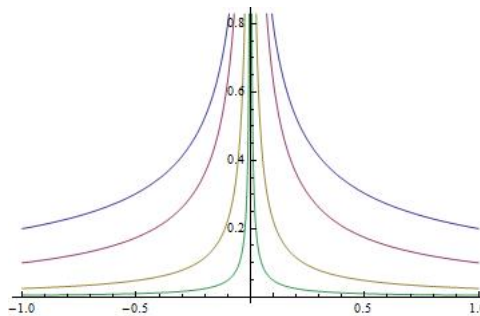
$$g_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq \frac{1}{m} \\ m^2 & \text{si } |x| < \frac{1}{m} \end{cases}$$

Montrer que ces suites convergent presque partout vers 0 dans \mathbb{R} , que la suite u_{f_m} converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers $2\delta_0$ et que la suite u_{g_m} ne converge pas dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exercice 2. Si elles existent, déterminer les limites pour $n \rightarrow +\infty$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ des distributions suivantes :

$$(a) \ n^2(\delta_{1/n} - 2\delta_0 + \delta_{-1/n}) \quad (b) \ n^3(\delta_{1/n} - \delta_{-1/n} - 2D\delta_0)$$

Exercice 3. Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose $f_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon}{2}|x|^{\varepsilon-1}$ ($x \in \mathbb{R}$) et on note u_ε la distribution associée. Dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, calculer $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon$.



Exercice 4. Soit $k \in \mathbb{N}_0$. On considère les suites $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ et $(g_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de fonctions définies sur \mathbb{R} par

$$f_m(x) = m^k e^{imx} \quad \text{et} \quad g_m(x) = m e^{-m|x|}$$

pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. Montrer que les suites de distributions $(u_{f_m})_{m \in \mathbb{N}_0}$ et $(u_{g_m})_{m \in \mathbb{N}_0}$ convergent dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Déterminer leurs limites.

Exercice 5. Soit $(f_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ la suite définie par

$$f_m(x) = \frac{\sin(mx)}{x}, \quad x \in \mathbb{R}_0$$

et soit u_m la distribution associée à f_m . Étudier la convergence de cette suite dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exercice 6. Soit $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de $L^1(\mathbb{R}^n)$ (resp. $L^2(\mathbb{R}^n)$, $L^\infty(\mathbb{R}^n)$) qui converge vers f dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ (resp. $L^2(\mathbb{R}^n)$, $L^\infty(\mathbb{R}^n)$). Est-ce que $(u_{f_m})_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers u_f dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$? Justifier.