Liste 4 - Avril 2012

Rappels :

► On désigne par $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions $f \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$p_{k,N}(f) = \sup_{|\alpha|\le k} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|)^N |D^\alpha f(x)| < +\infty$$

pour tous $k, N \in \mathbb{N}$. Une telle fonction est dite *à décroissance rapide.*

► Une distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est dite *tempérée* s'il existe une constante $C > 0$ et des naturels k, N tels que $|u(\varphi)| \le C p_{k,N}(\varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. On désigne par $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des distributions tempérées dans $\mathbb{R}^n$.

► Si u est une distribution tempérée, la *transformée de Fourier de* u, notée $\mathcal{F}^\pm u$, est définie par

$$(\mathcal{F}^\pm u)(\varphi) = u(\mathcal{F}^\pm \varphi) \ , \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

C'est une distribution tempérée et on a $\mathcal{F}^\mp \mathcal{F}^\pm u = (2\pi)^n u$.

► Soit $a > 0$. Une distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est *a-périodique* si $u(\varphi(.+a)) = u(\varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Toute distribution périodique est tempérée.

Exercice 1. Soit $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ une fonction positive d'intégrale égale à 1. Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose

$$\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \ x \in \mathbb{R}^n .$$

Montrer que

1. $\lim_{\varepsilon\to 0^+} u_{\rho_\varepsilon}(f) = f(0)$ pour tout $f \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$.
2. pour tout $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $u * u_{\rho_\varepsilon}$ converge vers u dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ si $\varepsilon \to 0^+$.

Exercice 2. On considère les fonctions définies dans $\mathbb{R}$ par

$$f_1(x) = c \ (c \in \mathbb{C}), \quad f_2(x) = x^n \ (n \in \mathbb{N}_0), \quad f_3(x) = e^x \quad \text{et} \quad f_4(x) = e^{iax} \ (a \in \mathbb{R}).$$

1. Les distributions associées sont-elles tempérées dans $\mathbb{R}$? Si oui, en calculer la transformée de Fourier.
2. En déduire que tout polynôme définit une distribution tempérée et en calculer la transformée de Fourier.

Exercice 3. Un calcul vu au cours a permis de montrer que la transformée de Fourier de la distribution associée à $Y = \chi_{]0,+\infty[}$ est

$$\mathcal{F}^\pm u_Y(\varphi) = \pi\varphi(0) \pm i \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

En déduire l'expression de la transformée de Fourier de la valeur principale de $1/x$.

Exercice 4. Soient u une distribution tempérée et a un réel. On considère l'application

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto (u * \varphi)(a).$$

1. Montrer que cette application est une distribution.
2. Cette distribution est-elle tempérée ? Pourquoi ?

Exercice 5. Soient les fonctionnelles définies sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ par

$$\varphi \mapsto \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi mx}\varphi(x)dx \quad \text{et} \quad \varphi \mapsto \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \varphi(m)$$

notées respectivement

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi mx} \quad \text{et} \quad \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta_m.$$

1. Comparer $\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi mx}$ et $\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta_m$.
2. En déduire que l'on a $\displaystyle 2\pi \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta_{\mp 2\pi m} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}^{\pm}\delta_m$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.