# Liste 5 – Espaces de Fréchet

---

**Définition 1.** Soit $E$ un espace vectoriel complexe. Une *semi-norme* sur $E$ est une application

$$p: \ E \ \to \ [0, +\infty[$$

telle que

$$p(e+f) \leq p(e) + p(f) \quad \text{ et } \quad p(\lambda e) = |\lambda| p(e)$$

pour tous $e, f \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$. Pour $e \in E$ et $r > 0$, on pose

$$B_p(e,r) = \{f \in E : p(f-e) < r\} = e + B_p(0,r)$$

et on parle des *semi-boules* associées à $p$.

**Exercice 1.** Soit $P$ un ensemble de semi-normes sur $E$. Si pour tous $p, q \in P$, il existe $s \in P$ et $C > 0$ tels que

$$\max\{p, q\} \leq Cs,$$

on dit que $P$ est *filtrant*. Montrer que dans ce cas, il existe une unique topologie $\mathcal{T}_P$ telle que pour tout $e \in E$, les semi-boules $B_p(e,r)$ associées aux éléments de $P$ forment une base de voisinages de $e$.

**Exercice 2.** Soit $P$ un ensemble filtrant de semi-normes sur $E$. L'espace $(E, \mathcal{T}_P)$ est séparé si et seulement si pour tout $e \in E \setminus \{0\}$, il existe $p \in P$ tel que $p(e) \neq 0$ (i.e. $p(e) = 0 \ \forall p \in P \Rightarrow e = 0$).

**Définition 2.** Un *espace de Fréchet* est un espace vectoriel complexe $E$ muni d'un ensemble dénombrable de semi-normes $P = \{p_m : m \in \mathbb{N}\}$ tel que

1. la suite $(p_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est croissante,
2. l'espace $(E, \mathcal{T}_P)$ est séparé,
3. toute suite de Cauchy de $(E, \mathcal{T}_P)$ converge, i.e. si $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $E$ telle que pour tout $m \in \mathbb{N}$
$$p_m(e_r - e_s) \to 0 \ \text{ si } \ r, s \to \infty,$$
alors il existe $e \in E$ tel que pour tout $m \in \mathbb{N}$
$$p_m(e_k - e) \to 0 \ \text{ si } \ k \to \infty.$$

**Exercice 3.** Soit $E$ un espace de Fréchet dont les semi-normes sont notées $(p_m)_{m \in \mathbb{N}}$.

(3.1) Montrer que l'application

$$d(e,f) = \sum_{m \in \mathbb{N}} 2^{-m} \frac{p_m(e-f)}{1 + p_m(e-f)}, \quad \forall e, f \in E$$

définit une distance sur $E$.

(3.2) Montrer que les suites convergentes (resp. de Cauchy) de $(E, \mathcal{T}_P)$ et de $(E, d)$ coïncident.

(3.3) En déduire que la topologie $\mathcal{T}_P$ définie par les semi-normes est la même que celle induite par la distance $d$.

**Exercice 4.** Soit $C_0(\Omega)$ l'ensemble des fonctions continues sur un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}$. Considérons une suite croissante $(K_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de compacts dont l'union donne $\Omega$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose

$$p_m(f) = \sup_{x \in K_m} |f(x)|, \quad \forall f \in C_0(\Omega).$$

(6.1) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $p_m$ est une semi-norme sur $C_0(\Omega)$.

(6.2) Montrer que $C_0(\Omega)$ muni des semi-normes $(p_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est un espace de Fréchet. Que signifie la convergence dans cet espace ?

(6.3) Montrer que cet espace de Fréchet n'est pas normable.

**Exercice 5.** Soit $E$ un espace vectoriel complexe.

(5.1) Si $p$ et $q$ sont deux semi-normes sur $E$, montrer que $\max\{p, q\}$ est une semi-norme sur $E$.

(5.2) Soit $(p_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de de semi-normes sur $E$. Montrer que l'on peut définir une suite croissante $(q_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de semi-normes sur $E$ qui définit les mêmes suites convergentes et les mêmes suites de Cauchy que $(p_m)_{m\in\mathbb{N}}$.

**Exercice 6.** Soit $\omega = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites complexes. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose

$$p_m(x) = |x_m| \ , \quad \forall x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \omega.$$

(6.1) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $p_m$ est une semi-norme sur $\omega$.

(6.2) Montrer que $\omega$ muni des semi-normes $(p_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est un espace de Fréchet. Que signifie la convergence dans cet espace ?

(6.3) Montrer que cet espace de Fréchet n'est pas normable.

**Exercice 7.** Soient $E$ et $F$ deux espaces de Fréchet dont les semi-normes sont données respectivement par $(p_m)_{m\in\mathbb{N}}$ et $(q_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Montrer qu'une application linéaire $T : E \to F$ est continue si et seulement si

$$\forall m \in \mathbb{N} \ \exists n \in \mathbb{N}, C > 0 \text{ tels que } q_m(T(e)) \leq C p_n(e) \ \forall e \in E.$$