Liste 1 – Rappels

Question 1. Examiner l'intégrabilité sur $]0,+\infty[$ de la fonction

$$x \mapsto \frac{\ln x^\alpha}{1+x^\alpha}$$

pour toutes les valeurs du réel non nul α.

Question 2. Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x \quad \text{et} \quad g(x) = e^{-x}\chi_{]0,+\infty[}(x).$$

Montrer que le produit de convolution $f * g$ est défini sur $\mathbb{R}$ et donner sa valeur en tout point de $\mathbb{R}$.

Question 3. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{1}{1+ix}.$$

A quels espaces $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}), \mathrm{L}^2(\mathbb{R}), \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$ appartient la fonction g ? Quelle est la norme de g dans ces espaces ?

Question 4.

(4.1) Pour tout $a > 0$, calculer la transformée de Fourier de la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}$ par $f_a(x) = e^{-a|x|}$.

(4.2) En déduire la valeur des intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(bx)}{(x^2+a^2)}\, dx \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\, dx$$

pour tous $a, b > 0$.

Question 5. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on considère la fonction f_m définie sur $\mathbb{R}$ par $f_m(x) = m^2 x^2 e^{-mx}$.

(5.1) Etudier la convergence ponctuelle de la suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ sur $]0,+\infty[$.

(5.2) Etudier la convergence uniforme de la suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ sur $]0,+\infty[$.

(5.3) Etudier la convergence uniforme de la suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ sur tout compact K de $]0,+\infty[$.

Question 6. Si elle existe, déterminer la limite de la suite $(y_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de terme général défini pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ par

$$y_m = \int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{m}\right)}{x^2}\, dx.$$

Question 7 (Critère d'annulation pp)**.** Soient Ω un ouvert non-vide de $\mathbb{R}^n$ et $f \in \mathrm{L}^1_{loc}(\Omega)$. Démontrer que $f = 0$ presque partout dans Ω si et seulement si

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx = 0 \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$ [1].

1. c'est-à-dire si et seulement si $u_f = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.