

Les réponses aux questions ci-dessous doivent être justifiées.

1. On donne  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ . On définit ensuite la suite  $\varphi_m$  ( $m \in \mathbb{N}_0$ ) par

$$\varphi_m(x) = \frac{\varphi(x)}{m}$$

$$\left( \text{resp. } \varphi_m(x) = \frac{\varphi(x/m)}{m}, \quad \varphi(x) = m\varphi(mx), \quad \varphi(x) = m\varphi(x/m), \quad \varphi(x) = \frac{\varphi(mx)}{m} \right).$$

Examiner la convergence dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  de cette suite  $\varphi_m$ .

2. Parmi les applications suivantes, quelles sont celles qui définissent des distributions dans  $\mathbb{R}$ ? En déterminer alors le support.

$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto D\varphi(1)$	$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \varphi(0) + D\varphi(1)$
$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \int_0^1 \varphi(x) dx$	$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \int_0^1  \varphi(x)  dx$
$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{n=0}^N (D^n \varphi)(0)$	$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi(n)$
$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (D^n \varphi)(0)$	$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (D^n \varphi)(n)$
$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(\frac{1}{n})$	$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \varphi(\frac{1}{n})$

3. On considère les fonctions

$$f_m(x) = \begin{cases} e^{-x/m} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

- Esquisser  $f_1, f_2, f_3$

- Pour  $m$  fixé, a-t-on  $f_m \in L^1(\mathbb{R})$ ? (resp.  $L^2(\mathbb{R})$ )? la fonction  $f_m$  définit-elle une distribution?

- La limite  $\lim_{m \rightarrow +\infty} f_m$  existe-t-elle au sens ponctuel (pp)? (resp. dans  $L^1(\mathbb{R})$ ,  $L^2(\mathbb{R})$ , au sens distribution?)

4. Déterminer la dérivée seconde de la distribution associée à la fonction  $|x|$ ,  $x \in \mathbb{R}$  (même question pour  $\sin(2x)\chi_{]0, +\infty[}(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ).

5. On se place dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . Déterminer la distribution suivante (simplifier au maximum l'expression)

$$e^x D\delta_0 + e^x \delta_0 + (\cos x) D\delta_0$$

6. On se place dans  $\mathbb{R}$ . On pose

$$\Pi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } |x| < \frac{1}{2} \end{cases}, \quad \rho_k(x) = k\Pi(kx), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Si, pour tout  $k$ ,  $u_k$  désigne la distribution dans  $\mathbb{R}$  associée à  $\rho_k$ , montrer que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k(\varphi) = \delta_0(\varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

7. On pose

$$u(\varphi) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - 2 \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} \right), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Montrer que  $u$  définit une distribution dans  $\mathbb{R}$  et que, si  $f(x) = \ln|x|$ , on a

$$u = D^2 u_f$$