TD du cours d'Analyse III, 2e partie
3ème BM
11 Mars 2010

1. Calculer la dérivée seconde de la distribution associée à la fonction $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$.
2. Parmi les applications suivantes, quelles sont celles qui définissent des distributions dans $\mathbb{R}$?

$$\text{(a) } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto (\varphi(0) - D\varphi(2))^2; \qquad \text{(b) } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} nD^n\varphi(n);$$

$$\text{(c) } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} D^n\varphi(1/n^2).$$

3. On pose

$$u(\varphi) = -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - 2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon} \right), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Montrer que u définit une distribution dans $\mathbb{R}$ (partie finie de $1/x^2$) et que, si $f(x) = \ln|x|$, on a

$$u = D^2 u_f.$$

4. Déterminer les distributions u de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui vérifient les équations suivantes :
   (a) $Du = vp(1/x)$;
   (b) $x^2 u = 1$;
   (c) $D^2u - 2Du + 1 = 0$;
   (d) $xDu = \delta_0 + \delta_1$.
5. Soient les suites f_m, g_m ($m \in \mathbb{N}_0$) définies par

$$f_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq 1/m \\ m^2 & \text{si } |x| < 1/m \end{cases}$$

et

$$g_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq 1/m \\ m & \text{si } |x| < 1/m \end{cases}$$

Montrer que ces suites convergent vers 0 pp dans $\mathbb{R}$, que la suite u_{f_m} ne converge pas dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et que la suite u_{g_m} converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers $2\delta_0$.
6. Déterminer les limites pour $n \to +\infty$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de
   (a) $n^2(\delta_{1/n} - 2\delta_0 + \delta_{-1/n})$;
   (b) $nf(nx)$ où $f \in L^1(\mathbb{R})$;
   (c) $n(1 - n|x|)\chi_{[-1/n,1/n]}(x)$.

7. Déterminer le support des distributions de l'exercice 2.