TD 1 du cours d'Analyse III, 2e partie
3ème BM
25 Février 2011

1. On se place dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Déterminer la distribution suivante (simplifier au maximum l'expression)
$$e^x D\delta_0 + e^x\delta_0 + \cos(x)D\delta_0.$$

2. Déterminer les distributions u de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui vérifient les équations suivantes :
$$\text{(a)} \quad xu = 0, \qquad \text{(b)} \quad x^2u = x^2.$$

3. On considère l'équation dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ suivante :
$$D^2u + u = \delta_0.$$
   (a) Vérifier que la distribution $u_{\sin(x)\chi_{]0,+\infty[}(x)}$ est une solution particulière de cette équation.
   (b) On sait que les solutions de cette équation sont les distributions $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ s'écrivant sous la forme
$$u = c_1 u_{\cos(x)} + c_2 u_{\sin(x)} + u_{\sin(x)\chi_{]0,+\infty[}(x)}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$
   Parmi celles-ci, quelles sont celles dont l'intervalle $]-\infty, 0[$ est un ouvert d'annulation ?

4. On pose
$$u(\varphi) = -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}dx - 2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon}\right), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$
Montrer que u définit une distribution dans $\mathbb{R}$ (partie finie de $1/x^2$) et que, si $f(x) = \ln|x|$, on a
$$u = D^2u_f.$$