TD 1 - 13 Mars 2015

Exercice 1. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$\varphi_m(x) = \frac{\varphi\left(x + \frac{1}{m}\right) - \varphi(x)}{\frac{1}{m}}, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

- Montrer que $\varphi_m \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$.
- La suite $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ converge-t-elle dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$? Si oui, en déterminer la limite.

Exercice 2. Les applications suivantes sont-elles des distributions dans $\mathbb{R}$? Justifier. En cas de réponse affirmative, en déterminer le support.

$$u_1 : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \int_0^{+\infty} \varphi(x)(D\varphi)(x)\, dx \qquad u_2 : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(e^x)\, dx$$

$$u_3 : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \int_0^{1} (D\varphi)(x)\, dx \qquad u_4 : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - \varphi(0)\right)$$

$$u_5 : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(x_n) \qquad u_6 : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_0) \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n^2\varphi(x_n)$$

où $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de réels qui converge vers 0.

Exercice 3. On pose

$$u(\varphi) = -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}dx - 2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon}\right)$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Montrer que u définit une distribution dans $\mathbb{R}$ et que si $f(x) = \ln(|x|)$, $x \in \mathbb{R}_0$, alors $u = D^2 u_f$.

Exercice 4. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on note

$$\mathcal{C} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y^2 - x^2 \geq 0, y \geq 0\right\}$$

et on désigne par u la distribution associée à la fonction caractéristique de $\mathcal{C}$. Calculer $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Exercice 5. Soit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \cos(x) & \text{si} \quad x > 0, \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0. \end{cases}$$

- Déterminer le plus grand naturel p pour lequel cette fonction est de classe C^p dans $\mathbb{R}$.
- Montrer qu'au sens distribution (dans $\mathbb{R}$), cette fonction vérifie l'équation

$$D^2 u + u = \chi_{]0,+\infty[}. \tag{1}$$

- En déduire la solution générale dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de l'équation (1).

Exercice 6. Déterminer les distributions u de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui vérifient les équations suivantes :

$$(a)\ xu = u \qquad (b)\ x^2u + u = 0 \qquad (c)\ Du = u_Y$$

$$(d)\ xDu = u_Y \qquad (e)\ xDu = \delta_0 \qquad (f)\ xDu + u = \delta_0.$$

Exercice 7. Soient u une distribution dans $\mathbb{R}^n$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que

$$\varphi u = 0 \Rightarrow u(\varphi) = 0$$

mais que la réciproque est fausse.