

TD 1 - MARS 2012

Exercice 1. Soient $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Si $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers φ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, est-ce que $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers φ ponctuellement, dans $L^1(\mathbb{R}^n)$, $L^2(\mathbb{R}^n)$ et $L^\infty(\mathbb{R}^n)$? Justifier. Qu'en est-il des implications réciproques?

Exercice 2. Les applications suivantes sont-elles des distributions? Si oui, en déterminer le support.

$$(a) \varphi \in \mathcal{D}(]0, 1[) \mapsto \sum_{m=1}^{+\infty} \varphi\left(\frac{1}{m}\right) \quad (b) \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{m=1}^{+\infty} m^2 \varphi(m)$$

$$(c) \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \quad (d) \varphi \in \mathcal{D}(]0, +\infty[) \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

Exercice 3. Soit u l'application définie par $u(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, x) dx$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$.

(3.1) Vérifier que u appartient à $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

(3.2) Calculer $(D_x + D_y)u$.

(3.3) Déterminer le support de u .

Exercice 4. On pose

$$u(\varphi) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - 2 \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} \right)$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Montrer que u définit une distribution dans \mathbb{R} et que si $f(x) = \ln(|x|)$, $x \in \mathbb{R}_0$, alors $u = D^2 u_f$.

Exercice 5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$\Pi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } |x| < \frac{1}{2} \end{cases}$$

et pour tout $k \in \mathbb{N}_0$,

$$\rho_k(x) = k \Pi(kx).$$

Si pour tout k , u_k désigne la distributions dans \mathbb{R} associée à ρ_k , montrer que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = \delta_0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Exercice 6. Soit $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de $L^1(\mathbb{R}^n)$ (resp. $L^2(\mathbb{R}^n)$, $L^\infty(\mathbb{R}^n)$) qui converge vers f dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ (resp. $L^2(\mathbb{R}^n)$, $L^\infty(\mathbb{R}^n)$). Est-ce que $(u_{f_m})_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers u_f dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$? Justifier.

Exercice 7. Déterminer les distributions u de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui vérifient les équations suivantes :

$$(a) xu = u \quad (b) x^2u + u = 0 \quad (c) x^2u = 0$$

$$(d) Du = u_Y \quad (e) xDu = u_Y \quad (f) xDu = \delta_0$$

$$(g) xDu + u = 0 \quad (h) xDu + u = \delta_0.$$

Exercice 8. Soient u une distribution dans \mathbb{R}^n et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que

$$\varphi u = 0 \Rightarrow u(\varphi) = 0$$

mais que la réciproque est fautive.