ANALYSE III, 2008-2009

Exercices–semaine du 02 mars 2009

$\boxed{\text{TD 2}}$

Les réponses aux questions ci-dessous doivent être justifiées.

1. Déterminer les distributions u de $D'(\mathbb{R})$ qui vérifient les équations suivantes (Y désigne la fonction caractéristique de $[0, +\infty[$):
   (a) $xu = 0, \quad xu = 1, \quad xu = \delta_0, \quad xu = u, \quad x^2u = u$
   (b) $Du = u_Y, \quad xDu = u_Y, \quad xDu = \delta_0$
   (c) $Du + u = 0, \quad Du + u = \delta_0$

2. Si m est un naturel strictement positif et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on définit l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ comme étant l'ensemble des élements u de $\mathcal{D}'(\Omega)$ dont les dérivées $D^k u$ ($k = 0, \ldots, m$) sont des distributions associées à des fonctions de $L^2(\Omega)$.

   On considère $\Omega =]-1, 1[$ et la distribution u associée à la fonction $f(x) = \frac{x+|x|}{2}$. Quel est le plus grand naturel m tel que $u \in H^m(\Omega)$?