

TD du cours d'Analyse III, 2e partie
3ème BM
31 Mars et 1^{er} Avril 2010

1. Soit u une distribution dans \mathbb{R}^n et soient f, g deux fonctions de $\mathcal{C}_\infty(\mathbb{R}^n)$. Démontrer que si $[u], [g]$ sont composables, alors $[fu]$ et $[g]$ sont composables.
2. Soit u une distribution à support compact dans \mathbb{R} . On définit l'opérateur

$$U : \mathcal{C}_\infty(\mathbb{R}) \rightarrow u * f.$$

- (a) Montrer que cet opérateur est bien défini.
 - (b) Calculer $U(f_p)$ pour tout complexe p , avec $f_p(x) = e^{px}$, $x \in \mathbb{R}$.
3. Soit

$$f(x) = \begin{cases} 2xe^x & \text{si } x \leq 0 \\ xe^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Si u désigne la distribution associée à f et si P est l'opérateur de dérivation $P(D) = D^2 - 2D + 1$, calculer la distribution

$$P(u * \delta_1).$$

4. (a) Les applications suivantes définissent-elles des distributions tempérées dans \mathbb{R} ?

$$D^2\delta_0, \quad u_{f_1}, \quad u_{f_2}, \quad u_{f_3}, \quad u_{f_4}$$

où $f_1(x) = e^{-x^2}$, $f_2(x) = \ln(x)$, $f_3(x) = \frac{1}{|x|}$, $f_4(x) = |x|$.

- (b) Si possible, déterminer les transformées de Fourier des distributions $D^2\delta_0$ et u_{f_1} .