

TD 2 du cours d'Analyse III, 2e partie
3ème BM
24 Mars 2011

- Calculer la dérivée seconde de la distribution associée à la fonction $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$.
- Les applications suivantes sont-elles des distributions? Pourquoi? Si oui, en déterminer le support.

$$(a) \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto (\varphi(0) - D\varphi(2))^2; \quad (b) \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^x \varphi(x) dx;$$

$$(c) \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(e^x) dx; \quad (d) \varphi \in \mathcal{D}(]0, 1[) \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(1/n);$$

$$(e) \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(1/n); \quad (f) \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} n D^n \varphi(n).$$

- Déterminer les distributions u de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui vérifient les équations suivantes :

$$(a) Du = vp(1/x); \quad (b) x^2 u = 1; \quad (c) D^2 u - 2Du + 1 = 0; \quad (d) xDu = \delta_0 + \delta_1 + x^2.$$

- Soient les suites f_m, g_m ($m \in \mathbb{N}_0$) définies par

$$f_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq 1/m \\ m^2 & \text{si } |x| < 1/m \end{cases}$$

et

$$g_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq 1/m \\ m & \text{si } |x| < 1/m \end{cases}$$

Montrer que ces suites convergent vers 0 presque partout sur \mathbb{R} , que la suite u_{f_m} ne converge pas dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et que la suite u_{g_m} converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers $2\delta_0$.

- Déterminer les limites pour $n \rightarrow +\infty$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de

- $n^2(\delta_{1/n} - 2\delta_0 + \delta_{-1/n})$;
- $nf(nx)$ où $f \in L^1(\mathbb{R})$;
- $n(1 - n|x|)\chi_{[-1/n, 1/n]}(x)$.

- Soit u une distribution dans \mathbb{R}^n et soient f, g deux fonctions de $\mathcal{C}_\infty(\mathbb{R}^n)$. Démontrer que si $[u], [g]$ sont composables, alors $[fu]$ et $[g]$ sont composables.

- Soit

$$f(x) = \begin{cases} 2xe^x & \text{si } x \leq 0 \\ xe^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Si u désigne la distribution associée à f et si P est l'opérateur de dérivation $P(D) = D^2 - 2D + 1$, calculer la distribution

$$P(u * \delta_1).$$