TD 2

Exercice 1. Soient $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $a \in \mathbb{R}^n$. On définit la fonction f par $f(x) = e^{<a,x>}$ $(x \in \mathbb{R}^n)$. Si u et v sont composables, montrer que fu et fv sont composables et que $f(u * v) = fu * fv$.

Exercice 2. On désigne par $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ l'ensemble des distributions de $\mathbb{R}$ à support inclus dans $[0, +\infty[$.

1. Montrer que si $u, v \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$, alors $u * v \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$.
2. Déterminer le neutre e pour $*$ dans $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$.
3. Si $u \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ et s'il existe $v \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ tel que $u * v = e$, montrer que v est unique. On note cet unique élément u^{-1}.
4. Si possible, calculer $(D\delta_0)^{-1}$.

Exercice 3. Soit

$$f(x) = \begin{cases} 2xe^x & \text{si } x \le 0 \\ xe^x & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Si u désigne la distribution associée à f et si P est l'opérateur de dérivation $P(D) = D^2 - 2D + 1$, calculer la distribution

$$P(u * \delta_1).$$

Exercice 4. Soit u une distribution tempérée dans $\mathbb{R}$ et soit $\alpha \in \mathbb{N}_0$.

1. Montrer que la distribution $D^\alpha u$ est également tempérée.
2. Montrer que
$$\mathcal{F}^{\pm}(D^\alpha u) = (\mp i)^\alpha f_\alpha \mathcal{F}^{\pm} u \text{ et } D^\alpha(\mathcal{F}^{\pm} u) = (\pm i)^\alpha \mathcal{F}^{\pm}(f_\alpha u)$$
où $f_\alpha(x) = x^\alpha$ $(x \in \mathbb{R})$.
3. La distribution $D^2\delta_0$ est-elle tempérée dans $\mathbb{R}$? Si oui, en calculer la transformée de Fourier.

Exercice 5. Si cela a un sens, déterminer la transformée de Fourier de la distribution associée à la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto |x|$ [1].

Exercice 6. Si cela a un sens, déterminer la transformée de Fourier de la distribution associée à la fonction $x \mapsto \sin(x)$.

Exercice 7. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on pose $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(-x)$ $(x \in \mathbb{R})$. On dit que $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est paire (resp. impaire) si $u(\tilde{\varphi}) = u(\varphi)$ (resp. $u(\tilde{\varphi}) = -u(\varphi)$) pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Montrer que si u est une distribution tempérée paire (resp. impaire), alors il est en de même pour sa transformée de Fourier.

Exercice 8. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes. On définit

$$u : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k \varphi(k).$$

(8.1) Montrer que u définit une distribution sur $\mathbb{R}$.

(8.2) Montrer que u est une distribution tempérée si et seulement s'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $C \ge 0$ tels que $|a_k| \le C\,(1+k)^p$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 9.

1. Si une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ converge dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, converge-t-elle dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$?
2. Si une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ converge dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, converge-t-elle dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$?

---

1. Suggestion : utiliser l'Exercice 4 et le résultat $\mathcal{F}^{\pm} vp\left(\frac{1}{x}\right) = u_{\pm i\pi\,\mathrm{sign}}$.