TD 2 – 21 avril 2015

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, soient

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2} \quad \text{et} \quad F_n(x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que la suite de distributions associées aux fonctions f_n converge dans $D'(\mathbb{R})$ vers une distribution à déterminer. Même question pour F_n.

Exercice 2. Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Pour tout $h \in \mathbb{R}$, on définit la distribution $T_h u$ par

$$(T_h u)(\varphi) = \underset{(x)}{u}\left(\varphi(x-h)\right), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Montrer que

$$\lim_{h \to 0} \frac{T_h u - u}{h} = Du.$$

Exercice 3. On désigne par $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ l'ensemble des distributions de $\mathbb{R}$ à support inclus dans $[0, +\infty[$.

(3.1) Montrer que si $u, v \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$, alors $u * v \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$.

(3.2) Déterminer le neutre e pour $*$ dans $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$.

(3.3) Si $u \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ et s'il existe $v \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ tel que $u * v = e$, montrer que v est unique. On note cet unique élément u^{-1}.

(3.4) Si possible, calculer $(D\delta_0)^{-1}$.

Exercice 4. Soit

$$f(x) = \begin{cases} 2xe^x & \text{si } x \leq 0 \\ xe^x & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Si u désigne la distribution associée à f et si P est l'opérateur de dérivation $P(D) = D^2 - 2D + 1$, calculer la distribution

$$P(u * \delta_1).$$

Exercice 5. Soit u une distribution tempérée dans $\mathbb{R}$ et soit $\alpha \in \mathbb{N}_0$.

1. Montrer que la distribution $D^\alpha u$ est également tempérée.
2. Montrer que
$$\mathcal{F}^{\pm}(D^\alpha u) = (\mp i)^\alpha f_\alpha \mathcal{F}^{\pm} u \text{ et } D^\alpha(\mathcal{F}^{\pm} u) = (\pm i)^\alpha \mathcal{F}^{\pm}(f_\alpha u)$$
où $f_\alpha(x) = x^\alpha$ $(x \in \mathbb{R})$.
3. La distribution $D^2\delta_0$ est-elle tempérée dans $\mathbb{R}$? Si oui, en calculer la transformée de Fourier.

Exercice 6. Si cela a un sens, déterminer la transformée de Fourier de la distribution associée à la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto |x|$ (Suggestion : utiliser l'Exercice 5 et le résultat $\mathcal{F}^{\pm} vp\left(\frac{1}{x}\right) = u_{\pm i\pi\, \mathrm{sign}}$).

Exercice 7. Si cela a un sens, déterminer la transformée de Fourier de la distribution associée à la fonction $x \mapsto \cos(x)\sin(x)$.

Exercice 8. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes. On définit

$$u : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k \varphi(k).$$

(8.1) Montrer que u définit une distribution sur $\mathbb{R}$.

(8.2) Montrer que u est une distribution tempérée si et seulement s'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $C \geq 0$ tels que $|a_k| \leq C\ (1+k)^p$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 9. Pour tout $a > 0$, on considère l'application

$$\Delta_a : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(ka).$$

(9.1) Montrer que Δ_a définit une distribution tempérée dans $\mathbb{R}$.

(9.2) Montrer que pour tout $a > 0$, il existe $b > 0$ tel que $\mathcal{F}^- \Delta_a = b\Delta_b$.

Exercice 10. Soit $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$ une fonction a-périodique.

(10.1) Montrer que f définit une distribution a-périodique u_f.

(10.2) Montrer que les développements en série de Fourier de f et de u_f correspondent.

Exercice 11.

(11.1) Si une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ converge dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, converge-t-elle dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$?

(11.2) Si une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ converge dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, converge-t-elle dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$?