TD 2 - Avril 2012

Exercice 1. Soient $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $a \in \mathbb{R}^n$. On définit la fonction f par $f(x) = e^{<a,x>}$ $(x \in \mathbb{R}^n)$. Si u et v sont composables, montrer que fu et fv sont composables et que $f(u * v) = fu * fv$.

Exercice 2. On désigne par $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ l'ensemble des distributions de $\mathbb{R}$ à support inclus dans $[0, +\infty[$.

1. Montrer que si $u, v \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$, alors $u * v \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$.
2. Déterminer le neutre e pour $*$ dans $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$.
3. Si $u \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ et s'il existe $v \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ tel que $u * v = e$, montrer que v est unique. On le note cet unique élément u^{-1}.
4. Si possible, calculer $(D\delta_0)^{-1}$.

Exercice 3. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$P_m(x) = \frac{m^n}{\pi^{n/2}} \left(1 - \frac{|x|^2}{m}\right)^{m^3}, \ x \in \mathbb{R}^n .$$

1. Etudier la convergence de la suite $(u_{P_m})_{m \in \mathbb{N}_0}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.
2. En déduire que si $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est à support compact, alors u est la limite dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ d'une suite de polynômes.

Exercice 4. Montrer que la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto |x|$ définit une distribution tempérée et en déterminer la transformée de Fourier [1].

Exercice 5. Soit u une distribution tempérée dans $\mathbb{R}$ et soit $\alpha \in \mathbb{N}_0$.

1. Montrer que la distribution $D^\alpha u$ est également tempérée.
2. Montrer que
$$\mathcal{F}^\pm(D^\alpha u) = (\mp i)^\alpha f_\alpha \mathcal{F}^\pm u \text{ et } D^\alpha(\mathcal{F}^\pm u) = (\pm i)^\alpha \mathcal{F}^\pm(f_\alpha u)$$
où $f_\alpha(x) = x^\alpha$ $(x \in \mathbb{R})$.
3. La distribution $D^2\delta_0$ est-elle tempérée dans $\mathbb{R}$? Si oui, en calculer la transformée de Fourier.

Exercice 6. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on pose $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(-x)$ $(x \in \mathbb{R})$. On dit que $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est paire (resp. impaire) si $u(\tilde{\varphi}) = u(\varphi)$ (resp. $u(\tilde{\varphi}) = -u(\varphi)$) pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Montrer que si u est une distribution tempérée paire (resp. impaire), alors il est en de même pour sa transformée de Fourier.

Exercice 7.

1. Déterminer $\mathcal{F}^-(D^2u - 4\pi^2 u)$ pour tout $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
2. Résoudre l'équation $D^2u - 4\pi^2u = 0$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Exercice 8.

1. Si une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ converge dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, converge-t-elle dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$?
2. Si une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ converge dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, converge-t-elle dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$?

1. Suggestion : $\mathcal{F}^\pm vp\left(\dfrac{1}{x}\right) = u_{\pm i\pi\,\mathrm{sign}}$.