TD 3 du cours d'Analyse III, 2e partie
3ème BM
7 Avril 2011

1. Un calcul vu au cours a permis de montrer que la transformée ($\pm$) de Fourier de la distribution associée à $Y = \chi_{]0,+\infty[}$ était
$$\mathcal{F}^{\pm} u_Y(\varphi) = \pi\varphi(0) \pm i \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$
En déduire l'expression de la transformée de Fourier de la distribution "valeur principale de $1/x$".
2. (a) Les applications suivantes définissent-elles des distributions tempérées dans $\mathbb{R}$?
$$D^2\delta_0, \qquad u_{f_1}, \qquad u_{f_2}, \qquad u_{f_3}, \qquad u_{f_4}$$
où $f_1(x) = e^{-x^2}$, $f_2(x) = \ln|x|$, $f_3(x) = \frac{1}{|x|}$, $f_4(x) = |x|$.
   (b) Si elles existent, déterminer les transformées de Fourier des distributions $D^2\delta_0$, u_{f_1} et u_{f_4}.
3. Dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, résoudre l'équation
$$D^2u - 4\pi^2 u = 0.$$
4. On considère les lois
$$u : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{m=-\infty}^{+\infty} m\varphi(m)$$
et
$$v : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \varphi(2\pi m).$$
   (a) Montrer que u et v sont des distributions tempérées.
   (b) Déterminer le support de u.
   (c) Calculer la transformée de Fourier $\hat{u}$ de u et montrer que l'on a $i\hat{u} = 2\pi Dv$.