TD 3 - Mai 2012

Pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, on définit la fonction χ_k par

$$\chi_k(x) := 2^k \chi_{[0,2^{-k}]}(x),\ x \in \mathbb{R}$$

et on considère la suite $(F_M)_{M \in \mathbb{N}_0}$ définie par

$$F_M := \chi_1 * ... * \chi_M = \mathop{\Huge *}_{k=1}^{M} \chi_k,\ M \in \mathbb{N}_0\,.$$

Propriété : la suite $(F_M)_{M \in \mathbb{N}_0}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$ vers une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

On demande de démontrer cette propriété et d'esquisser une représentation graphique de F_M (pour quelques valeurs de M) et de la limite. Quelques suggestions d'étapes sont données ci-dessous.

1. Montrer que la transformée de Fourier complexe de χ_k, définie dans $\mathbb{C}$ par
$$\widehat{\chi_k}(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-izt} \chi_k(t)dt,$$
est holomorphe dans $\mathbb{C}$.
2. Soit $(f_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ une suite de fonctions définies dans un ensemble E et à valeurs complexes. Montrer que si la série $\sum_{k=1}^{+\infty} |f_k|$ converge uniformément sur E vers une fonction bornée sur E, alors le produit infini $\prod_{k=1}^{+\infty}(f_k + 1)$ converge uniformément sur E.
3. Déduire des deux points précédents que le produit infini $\prod_{k=1}^{+\infty} \widehat{\chi_k}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$ vers une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$.
4. En utilisant des techniques du type "Paley-Wiener", montrer que la fonction $\prod_{k=1}^{+\infty} \widehat{\chi_k}$ est la transformée de Fourier d'une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.
5. En déduire que la suite $(F_M)_{M \in \mathbb{N}_0}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$ vers une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.