ANALYSE III, 2008-2009

Exercices–semaine du 20 avril 2009

$\boxed{\text{TD 4}}$

Les réponses aux questions ci-dessous doivent être justifiées.

1. Montrer que la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto |x|$ définit une distribution tempérée et en déterminer la transformée de Fourier.

2. On se place dans $\mathbb{R}^2$ et on donne les fonctions suivantes

$$f_1(x,y) = \frac{1}{|x|+|y|}, \quad f_2(x,y) = \frac{1}{|xy|}, \quad f_3(x,y) = \frac{1}{|(x,y)|}, \quad f_4(x,y) = e^{ix}$$

$$f_5(x,y) = \cos x, \quad f_6(x,y) = e^x, \quad f_7(x,y) = xy, \quad f_8(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0,\ y \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{si } x < 0,\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

   Parmi ces fonctions, quelles sont celles qui définissent des distributions tempérées?

3. Si possible, déterminer les transformées de Fourier des distributions associées aux fonctions $f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8$.

4. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Montrer que si la distribution fu est nulle alors $u(f) = 0$ mais que la réciproque est fausse.

5. Une somme périodique de distributions de Dirac est appelée traditionnellement *peigne de Dirac* (par exemple $\varphi \mapsto \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \varphi(ma)$ avec $a > 0$)

   Montrer que la transformée de Fourier d'un peigne de Dirac est encore un peigne de Dirac.