Analyse III, partie 2 – Test de rentrée – Février 2011

Question 1. On définit les fonctions f et g par

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad (x \in \mathbb{R}_0) \quad \text{et} \quad g(x) = e^{-|x|} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

(1.1) À quels espaces $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$, $L^\infty(\mathbb{R})$ appartiennent les fonctions f et g ?

(1.2) Si possible, déterminer les transformées de Fourier de f et de g.

(1.3) Si possible, calculer les normes des fonctions f et g dans les espaces $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$, $L^\infty(\mathbb{R})$ ainsi que celles de leurs transformées de Fourier.

Question 2. Donner un exemple de fonctions orthonormées non nulles dans $L^2([0,1])$.

Question 3. Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x \quad \text{et} \quad g(x) = e^{-x}\chi_{]0,+\infty[}(x).$$

Montrer que le produit de convolution $f \star g$ est défini sur $\mathbb{R}$ et donner sa valeur en tout point de $\mathbb{R}$.

Question 4. **(4.1)** Définir la notion de fonction étagée dans $]0,+\infty[$ et en donner un exemple.

(4.2) Donner la définition de l'espace $\mathcal{D}(]0,+\infty[)$ et donner un exemple de fonction appartenant à cet espace.

Question 5. **(5.1)** Quand dit-on qu'une suite de fonctions converge ponctuellement et uniformément sur un ensemble A de $\mathbb{R}^n$?

(5.2) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ une suite de fonctions qui converge ponctuellement vers f sur un ensemble A de $\mathbb{R}^n$. À quelle(s) condition(s) suffisante(s) sur la suite sa limite est-elle continue sur A ? Ces conditions sont-elles nécessaires ?

(5.3) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ une suite de fonctions qui converge ponctuellement vers f sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. À quelle(s) condition(s) suffisante(s) sur la suite sa limite est-elle continûment dérivable sur Ω ? Ces conditions sont-elles nécessaires ?