

TEST DE RENTRÉE - 16 FÉVRIER 2012

Question 1. Examiner l'intégrabilité sur $]0, +\infty[$ de

$$x \mapsto \frac{\ln x^\alpha}{1 + x^\alpha}$$

pour toutes les valeurs du réel non nul α .

Question 2. La fonction

$$x \mapsto \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

appartient-elle aux espaces $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$ et $L^\infty(\mathbb{R})$?

Question 3. On définit les fonctions f et g par

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad (x \in \mathbb{R}_0) \quad \text{et} \quad g(x) = e^{-|x|} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

(3.1) A quels espaces $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$, $L^\infty(\mathbb{R})$ appartiennent les fonctions f et g ?

(3.2) Si possible, déterminer les transformées de Fourier de f et g .

(3.3) Si possible, calculer les normes des fonctions f et g dans les espaces $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$, $L^\infty(\mathbb{R})$ ainsi que celles de leurs transformées de Fourier.

Question 4. Soient les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par

$$f(x) = x \quad \text{et} \quad g(x) = e^{-x} \chi_{]0, +\infty[}(x).$$

Montrer que le produit de convolution $f * g$ est défini sur \mathbb{R} et donner sa valeur en tout point de \mathbb{R} .

Question 5. Donner la définition de l'espace $\mathcal{D}(]0, +\infty[)$ et donner un exemple de fonction appartenant à cet ensemble.

Question 6.

(6.1) Quand dit-on qu'une suite de fonctions converge ponctuellement et uniformément sur un ensemble A de \mathbb{R}^n ?

(6.2) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge ponctuellement vers f sur un ensemble A de \mathbb{R}^n . A quelle(s) condition(s) suffisante(s) sur la suite la limite est-elle continue sur A ? Ces conditions sont-elles nécessaires ?

(6.3) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge ponctuellement vers f sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^n . A quelle(s) condition(s) suffisante(s) sur la suite la limite est-elle continûment dérivable sur Ω ? Ces conditions sont-elles nécessaires ?