Test de rentrée – 13 février 2014

Question 1. Examiner l'intégrabilité sur $]0, +\infty[$ de

$$x \mapsto \frac{\ln x^\alpha}{1 + x^\alpha}$$

pour toutes les valeurs du réel non nul α.

Question 2.

(2.1) On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

A quels espaces $L^1(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}), L^\infty(\mathbb{R})$ appartient la fonction f ? Quelle est la norme de f dans ces espaces ? Si possible, déterminer la transformée de Fourier $(-)$ de f.

(2.2) On considère la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{1}{1 + ix} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

A quels espaces $L^1(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}), L^\infty(\mathbb{R})$ appartient la fonction g ? Quelle est la norme de g dans ces espaces ? Si possible, déterminer la transformée de Fourier $(+)$ de g.

Question 3. Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x \quad \text{et} \quad g(x) = e^{-x}\chi_{]0,+\infty[}(x).$$

Montrer que le produit de convolution $f * g$ est défini sur $\mathbb{R}$ et donner sa valeur en tout point de $\mathbb{R}$.

Question 4.

(4.1) Quand dit-on qu'une suite de fonctions converge ponctuellement et uniformément sur un ensemble A de $\mathbb{R}^n$?

(4.2) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge ponctuellement vers f sur un ensemble A de $\mathbb{R}^n$. A quelle(s) condition(s) suffisante(s) sur la suite la limite est-elle continue sur A ? Ces conditions sont-elles nécessaires ?

(4.3) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge ponctuellement vers f sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. A quelle(s) condition(s) suffisante(s) sur la suite la limite est-elle continûment dérivable sur Ω ? Ces conditions sont-elles nécessaires ?

Question 5 (Critère d'annulation pp)**.** Soient Ω un ouvert non-vide de $\mathbb{R}^n$ et $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Démontrer que $f = 0$ presque partout dans Ω si et seulement si

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx = 0 \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$ [1].

1. c'est-à-dire si et seulement si $u_f = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.