Répétition du cours d'Analyse III, 2e partie
3ème BM
17 Mars 2011

1. Soit u_n ($n \in \mathbb{N}_0$) une suite de distributions qui converge vers u dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ (où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}$). Démontrer que la suite Du_n converge vers Du dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Qu'en est-il de la réciproque ?

2. Étudier la convergence dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ des suites de distributions suivantes ($n \in \mathbb{N}_0$) :

$$\text{a)}n\left(\delta_{1/n} - \delta_{-1/n}\right), \qquad \text{b)}n^3\left(\delta_{1/n} - \delta_{-1/n} - 2\delta_0\right), \qquad \text{c)}D^2\left(\delta_0 - \frac{1}{n}\delta_{1/n}\right).$$

3. Soit $k \in \mathbb{N}_0$. Pour tout naturel strictement positif m, soit la fonction $f_m(x) = m^k e^{imx}$ ($x \in \mathbb{R}$). Montrer que la suite de distributions associée à ces fonctions converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers une distribution u. Déterminer u.

4. Soient a, $b \in \mathbb{R}^n$. Calculer si possible $\delta_a * \delta_b$.

5. Montrer que les expressions suivantes ont un sens et les comparer

$$(u_1 * D\delta_0) * u_Y, \quad u_1 * (D\delta_0 * u_Y)$$

(Y désigne la fonction caractéristique de l'intervalle $]0, +\infty[$).