Répétition du cours d'Analyse III, 2e partie
3ème BM
31 Mars 2011

1. Les distributions dans $\mathbb{R}$ suivantes sont-elles tempérées ? En calculer alors la transformée de Fourier.
$$u_{f_1}, \qquad u_{f_2} \qquad u_{f_3}, \qquad u_{f_4},$$
où $f_1(x) = C$ $(C \in \mathbb{C})$, $f_2(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, $f_3(x) = e^{-x}$, $f_4(x) = e^{i\pi x}$.

2. On pose
$$u_1 = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-1}) \qquad \text{et} \qquad u_m = u_{m-1} * u_1 \quad \forall m \geq 2.$$
   (a) Exprimer u_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ en termes d'une combinaison linéaire de distributions de Dirac.
   (b) Si cela a un sens, calculer la transformée de Fourier de u_m pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. Démontrer qu'il s'agit d'une distribution associée à une fonction de classe C_∞ sur $\mathbb{R}$.

3. Soient les fonctionnelles définies par
$$\varphi \mapsto \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi mx} \varphi(x)dx, \qquad \varphi \mapsto \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \varphi(m)$$
et notées respectivement
$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi mx}, \qquad \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta_m.$$
   (a) Comparer $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi mx}$ et $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta_m$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
   (b) Déduire du point (a) que l'on a
$$2\pi \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta_{\mp 2\pi m} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}^{\pm} \delta_m$$
   dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.