

Analyse II

Liste supplémentaire 1 Correction

1. Montrer qu'en coordonnées polaires $((r, \theta)$ dans $\mathbb{R}^2$ et (r, θ, φ) dans $\mathbb{R}^3$), le Laplacien est décrit de la manière suivante (see [EK], chapitre 12)

$$\Delta = D_r^2 + \frac{1}{r}D_r + \frac{1}{r^2}D_\theta^2 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2$$

$$\Delta = D_r^2 + \frac{2}{r}D_r + \frac{1}{r^2}D_\varphi^2 + \frac{\cotg \varphi}{r^2}D_\varphi + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi}D_\theta^2 \quad \text{dans } \mathbb{R}^3$$

Résolution

Le Laplacien est l'opérateur de dérivation du second ordre défini en coordonnées cartésiennes par

$$\Delta = D_x^2 + D_y^2 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad \Delta = D_x^2 + D_y^2 + D_z^2 \quad \text{dans } \mathbb{R}^3.$$

Dans $\mathbb{R}^2$:

Le passage aux coordonnées polaires est réalisé par le changement de variables

$$\Gamma : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow]0, +\infty[\times [0, 2\pi[: (x, y) \mapsto (r, \theta)$$

où

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}.$$

La matrice jacobienne est dans ce cas

$$\begin{matrix} & D_r & D_\theta \\ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} & \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \end{matrix}$$

et la transformation des opérateurs de dérivation s'effectue par la formule

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}^{-1, T} \begin{pmatrix} D_r \\ D_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\frac{1}{r} \sin \theta \\ \sin \theta & \frac{1}{r} \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_r \\ D_\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta D_r - \frac{1}{r} \sin \theta D_\theta \\ \sin \theta D_r + \frac{1}{r} \cos \theta D_\theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Le Laplacien s'écrit alors en coordonnées polaires

$$\begin{aligned}
 \Delta &= D_x^2 + D_y^2 \\
 &= (\cos \theta D_r - \frac{1}{r} \sin \theta D_\theta)(\cos \theta D_r - \frac{1}{r} \sin \theta D_\theta) \\
 &\quad + (\sin \theta D_r + \frac{1}{r} \cos \theta D_\theta)(\sin \theta D_r + \frac{1}{r} \cos \theta D_\theta) \\
 &= \cos^2 \theta D_r^2 + \frac{2}{r^2} \sin \theta \cos \theta D_\theta - \frac{2}{r} \sin \theta \cos \theta D_r D_\theta + \frac{1}{r} \sin^2 \theta D_r + \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta D_\theta^2 \\
 &\quad + \sin^2 \theta D_r^2 - \frac{2}{r^2} \sin \theta \cos \theta D_\theta + \frac{2}{r} \sin \theta \cos \theta D_r D_\theta + \frac{1}{r} \cos^2 \theta D_r + \frac{1}{r^2} \cos^2 \theta D_\theta^2 \\
 &= D_r^2 + \frac{1}{r} D_r + \frac{1}{r^2} D_\theta^2.
 \end{aligned}$$

Dans $\mathbb{R}^3$:

Une procédure semblable conduit au résultat annoncé.

2. Si ρ désigne la densité d'une distribution de masse dans le domaine A du plan, la masse totale est donnée par

$$M = \iint_A \rho(x, y) dx dy,$$

le centre de gravité de la masse a pour coordonnées cartésiennes (x_g, y_g) avec

$$x_g = \frac{1}{M} \iint_A x \rho(x, y) dx dy, \quad y_g = \frac{1}{M} \iint_A y \rho(x, y) dx dy$$

et les moments d'inertie de la masse par rapport aux axes sont

$$I_X = \frac{1}{M} \iint_A x^2 \rho(x, y) dx dy, \quad I_Y = \frac{1}{M} \iint_A y^2 \rho(x, y) dx dy.$$

Si A est le quart du disque centré à l'origine, de rayon 1 et situé dans le premier quadrant et si ρ est identiquement 1 dans cet ensemble, déterminer les éléments définis ci-dessus.

Résolution

La partie A du plan correspond à l'ensemble

$$A = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) : r \in]0, 1[, \theta \in]0, \frac{\pi}{2}[\}.$$

Pour la masse, on a alors

$$M = \iint_A \rho(x, y) dx dy = \iint_A 1 dx dy = \text{Aire } A = \frac{\pi}{4}.$$

Les coordonnées (x_g, y_g) du centre de gravité sont données par

$$\begin{aligned} x_g &= \frac{1}{M} \iint_A x \rho(x, y) dx dy = \frac{4}{\pi} \iint_A x dx dy = \frac{4}{\pi} \int_0^1 \int_0^{\pi/2} (r \cos \theta) r d\theta dr \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^1 r^2 [\sin \theta]_0^{\pi/2} dr = \frac{4}{\pi} \int_0^1 r^2 dr = \frac{4}{3\pi}, \\ y_g &= \frac{1}{M} \iint_A y \rho(x, y) dx dy = \frac{4}{\pi} \int_0^1 \int_0^{\pi/2} (r \sin \theta) r d\theta dr \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^1 r^2 [-\cos \theta]_0^{\pi/2} dr = \frac{4}{\pi} \int_0^1 r^2 dr = \frac{4}{3\pi}. \end{aligned}$$

Le centre de gravité de A est donc le point de coordonnées $(\frac{4}{3\pi}, \frac{4}{3\pi})$.

Pour les moments d'inertie de la masse par rapport aux axes, on obtient

$$\begin{aligned} I_X &= \frac{1}{M} \iint_A x^2 \rho(x, y) dx dy = \frac{4}{\pi} \iint_A x^2 dx dy = \frac{4}{\pi} \int_0^1 \int_0^{\pi/2} (r \cos \theta)^2 r d\theta dr \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^1 r^3 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) d\theta dr = \frac{2}{\pi} \int_0^1 r^3 \underbrace{\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{\pi/2}}_{\frac{\pi}{2}} dr \\ &= \int_0^1 r^3 dr = \frac{1}{4}, \\ I_Y &= \frac{1}{M} \iint_A y^2 \rho(x, y) dx dy = \frac{4}{\pi} \iint_A y^2 dx dy = \frac{4}{\pi} \int_0^1 \int_0^{\pi/2} (r \sin \theta)^2 r d\theta dr \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^1 r^3 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta) d\theta dr = \frac{2}{\pi} \int_0^1 r^3 \underbrace{\left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{\pi/2}}_{\frac{\pi}{2}} dr \\ &= \int_0^1 r^3 dr = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

3. (EK p 438) Calculer (si possible) et représenter l'ensemble d'intégration pour

$$\int_0^1 \left(\int_{1-x}^{1-x^2} x^2 y dy \right) dx, \quad \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\sin y} e^x \cos y dx \right) dy,$$

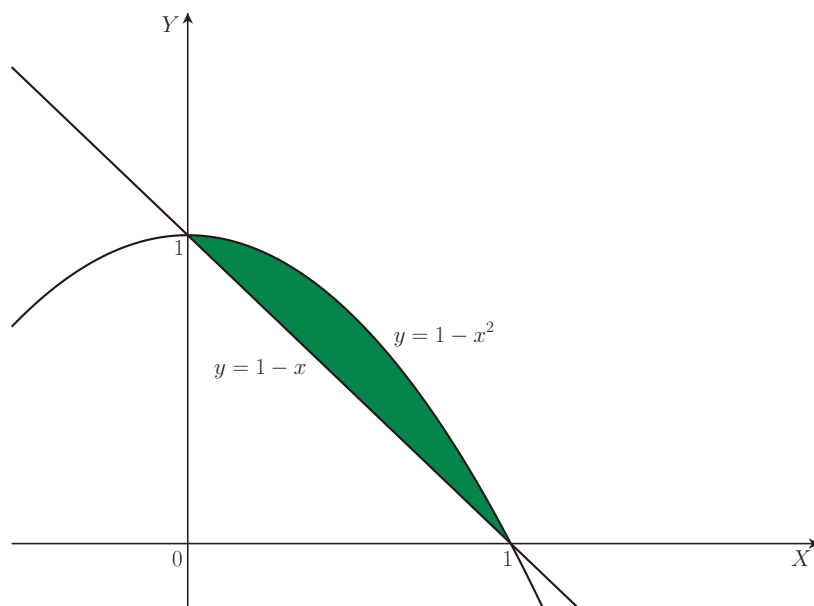
et l'intégrale de $f(x, y) = xye^{x^2-y^2}$ sur la surface fermée bornée déterminée par le triangle de sommets $(0, 0)$, $(1, 1)$ et $(1, 2)$.

Résolution

- Le domaine d'intégration correspondant à l'intégrale

$$\int_0^1 \left(\int_{1-x}^{1-x^2} x^2 y dy \right) dx$$

est donné par



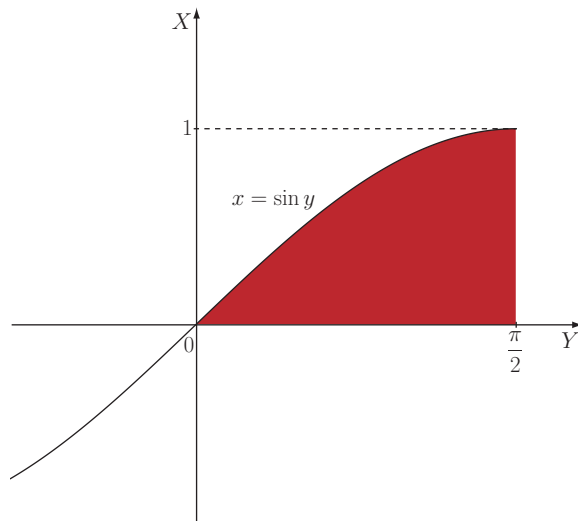
On a alors

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \left(\int_{1-x}^{1-x^2} x^2 y \, dy \right) dx &= \int_0^1 x^2 \left(\int_{1-x}^{1-x^2} y \, dy \right) dx = \int_0^1 x^2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{1-x}^{1-x^2} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 \left((1-x^2)^2 - (1-x)^2 \right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 2x^3 - 3x^4 + x^6 \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[2\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{5} + \frac{1}{7} \right) \\
 &= \frac{3}{140}.
 \end{aligned}$$

- Le domaine d'intégration correspondant à l'intégrale

$$\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\sin y} e^x \cos y \, dx \right) dy$$

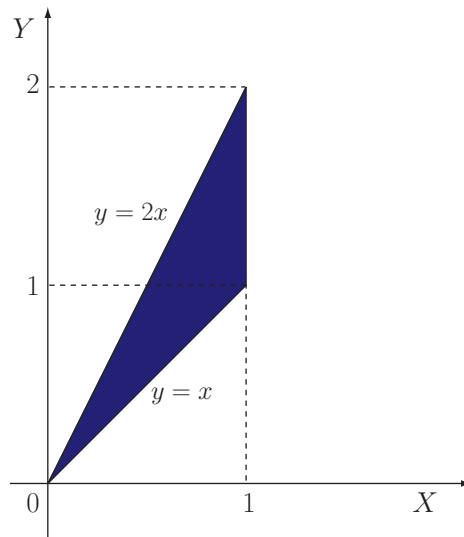
est donné par



On a alors

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\sin y} e^x \cos y \, dx \right) dy &= \int_0^{\pi/2} \cos y \left(\int_0^{\sin y} e^x \, dx \right) dy \\
 &= \int_0^{\pi/2} \cos y [e^x]_0^{\sin y} dy = \int_0^{\pi/2} \cos y (e^{\sin y} - 1) dy \\
 &= \int_0^{\pi/2} \underbrace{e^{\sin y} \cos y}_{D_y e^{\sin y}} dy - \int_0^{\pi/2} \cos y dy \\
 &= [e^{\sin y}]_0^{\pi/2} - [\sin y]_0^{\pi/2} \\
 &= e - 2.
 \end{aligned}$$

- La surface fermée délimitée par le triangle



a pour expression analytique

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 2x\}.$$

L'intégrale demandée est alors

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \left(\int_x^{2x} x y e^{x^2 - y^2} dy \right) dx \\
&= \int_0^1 x e^{x^2} \left(\int_x^{2x} \underbrace{y e^{-y^2}}_{D_y(-\frac{1}{2}e^{-y^2})} dy \right) dx = \int_0^1 x e^{x^2} \left[-\frac{1}{2} e^{-y^2} \right]_x^{2x} dx \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^1 x e^{x^2} (e^{-4x^2} - e^{-x^2}) dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 x e^{-3x^2} - x dx \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^1 x e^{-3x^2} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 x dx = -\frac{1}{2} \left[-\frac{1}{6} e^{-3x^2} \right]_0^1 + \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{12} (e^{-3} - 1) + \frac{1}{4} \\
&= \frac{e^{-3}}{12} + \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

4. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b > 0$, calculer

$$\int_0^{+\infty} e^{-bx} \frac{\sin(ax)}{x} dx.$$

Résolution

Soit $b > 0$. Considérons les fonctions

$$I_b(a) = \int_0^{+\infty} e^{-bx} \frac{\sin(ax)}{x} dx$$

sur $]0, +\infty[$ et

$$f_b(x, a) = e^{-bx} \frac{\sin(ax)}{x}$$

sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$.

On vérifie aisément que:

- pour tout $x \in]0, +\infty[$, la fonction $a \mapsto f_b(x, a)$ est de classe C_1 dans $\mathbb{R}$;
- pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction $f_b(x, a)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$;
- pour tout compact K de $\mathbb{R}$, il existe une fonction intégrable $F_K(x)$ sur $]0, +\infty[$, par exemple $F_K(x) = e^{-bx}$, telle que

$$\sup_{a \in K} |D_a f_b(x, a)| = \sup_{a \in K} |e^{-bx} \cos(ax)| \leq e^{-bx} = F_K(x)$$

sur $]0, +\infty[$.

En vertu du théorème des intégrales paramétriques, la fonction $I_b(a)$ est de classe C_1 dans $\mathbb{R}$ et

$$D_a I_b(a) = \int_0^{+\infty} D_a f_b(x, a) dx.$$

Dès lors, on a

$$\begin{aligned} D_a I_b(a) &= \int_0^{+\infty} e^{-bx} \cos(ax) dx = \mathcal{R} \left(\int_0^{+\infty} e^{(ia-b)x} dx \right) \\ &= \mathcal{R} \left(\left[\frac{e^{(ia-b)x}}{ia-b} \right]_0^{+\infty} \right) = \mathcal{R} \left(-\frac{1}{ia-b} \right) \\ &= \mathcal{R} \left(\frac{b+ia}{a^2+b^2} \right) = \frac{b}{a^2+b^2} \\ &= \frac{1}{b} \frac{1}{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2}. \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $a \in \mathbb{R}$

$$I_b(a) = \arctan \left(\frac{a}{b} \right) + C$$

où C est une constante. En considérant le cas $a = 0$, on obtient $C = 0$.

Finalement, la valeur de l'intégrale demandée est

$$\int_0^{+\infty} e^{-bx} \frac{\sin(ax)}{x} dx = \arctan \left(\frac{a}{b} \right)$$

pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b > 0$.

5. Vérifier la formule de Stokes-Ampère pour la fonction vectorielle $\vec{f} = [x^2y, 0, xyz]$ et la surface $\mathcal{S}$ composée de la portion de cylindre d'équation cartésienne $x^2 + y^2 = R^2$ limitée par les plans d'équation $z = 0$, $z = h$ et l'ensemble $\{(x, y, h) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$ ($h, R > 0$).

Résolution

La surface $\mathcal{S}$ se compose de la surface latérale S_L et du disque supérieur S_1 dont les paramétrages respectifs sont donnés par

$$S_L : (R \cos \theta, R \sin \theta, z), \quad z \in [0, h], \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

et

$$S_1 : (r \cos \theta, r \sin \theta, h), \quad r \in [0, R], \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

La formule de Stokes-Ampère affirme alors que

$$\iint_{S^+} \text{rot } \vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma = \oint_{C^+} \vec{f} \cdot \vec{t} ds$$

où $\vec{n}$ est la normale unitaire à la surface orientée $\mathcal{S}^+$, $\mathcal{C}^+$ la frontière orientée de $\mathcal{S}^+$ et $\vec{t}$ le vecteur tangent unitaire de $\mathcal{C}^+$.

Calculons le premier membre. On a

$$\iint_{\mathcal{S}^+} \text{rot } \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iint_{S_L^+} \text{rot } \vec{f} \cdot \vec{n}_L \, d\sigma + \iint_{S_1^+} \text{rot } \vec{f} \cdot \vec{n}_1 \, d\sigma$$

avec

$$\text{rot } \vec{f} = [xz, -yz, -x^2].$$

- Pour l'intégrale sur la surface latérale S_L^+ , si on pose

$$\vec{\Gamma}_L(\theta, z) = [R \cos \theta, R \sin \theta, z], \quad z \in [0, h], \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

la normale unitaire $\vec{n}_L$ peut s'écrire

$$\vec{n}_L = \frac{1}{\|D_\theta \vec{\Gamma}_L(\theta, z) \wedge D_z \vec{\Gamma}_L(\theta, z)\|} \left(D_\theta \vec{\Gamma}_L(\theta, z) \wedge D_z \vec{\Gamma}_L(\theta, z) \right).$$

On a

$$\begin{aligned} D_\theta \vec{\Gamma}_L(z, \theta) \wedge D_z \vec{\Gamma}_L(z, \theta) &= [-R \sin \theta, R \cos \theta, 1] \wedge [0, 0, 1] \\ &= [R \cos \theta, R \sin \theta, 0], \end{aligned}$$

donc

$$\|D_\theta \vec{\Gamma}_L(\theta, z) \wedge D_z \vec{\Gamma}_L(\theta, z)\| = R$$

et

$$\vec{n}_L = [\cos \theta, \sin \theta, 0].$$

On remarque que ce vecteur pointe vers l'extérieur du cylindre. Dès lors, il vient

$$\begin{aligned} &\iint_{S_L^+} \text{rot } \vec{f} \cdot \vec{n}_L \, d\sigma \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^h \left(\text{rot } \vec{f} \right) (R \cos \theta, R \sin \theta, z) \cdot \left(D_\theta \vec{\Gamma}_L \wedge D_z \vec{\Gamma}_L \right) \frac{\|D_\theta \vec{\Gamma}_L \wedge D_z \vec{\Gamma}_L\|}{\|D_\theta \vec{\Gamma}_L \wedge D_z \vec{\Gamma}_L\|} \, dz \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^h [Rz \cos \theta, -Rz \sin \theta, -R^2 \cos^2 \theta] \cdot [R \cos \theta, R \sin \theta, 0] \, dz \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^h R^2 z \cos(2\theta) \, dz \, d\theta = \frac{h^2 R^2}{2} \int_0^{2\pi} \cos(2\theta) \, d\theta = \frac{h^2 R^2}{2} \left[\frac{\sin(2\theta)}{2} \right]_0^{2\pi} \\ &= 0. \end{aligned}$$

- Pour l'intégrale sur le disque supérieur S_1^+ , si on pose

$$\vec{\Gamma}_1(r, \theta) = [r \cos \theta, r \sin \theta, h], \quad r \in [0, R], \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

la normale unitaire $\vec{n}_1$ peut s'écrire

$$\vec{n}_1 = \frac{1}{\|D_r \vec{\Gamma}_1(r, \theta) \wedge D_\theta \vec{\Gamma}_1(r, \theta)\|} \left(D_r \vec{\Gamma}_1(r, \theta) \wedge D_\theta \vec{\Gamma}_1(r, \theta) \right).$$

On a

$$\begin{aligned} D_r \vec{\Gamma}_1(r, \theta) \wedge D_\theta \vec{\Gamma}_1(r, \theta) &= [\cos \theta, \sin \theta, 0] \wedge [-r \sin \theta, r \cos \theta, 0] \\ &= [0, 0, r] \end{aligned}$$

donc

$$\|D_r \vec{\Gamma}_1 \wedge D_\theta \vec{\Gamma}_1\| = r$$

et

$$\vec{n}_1 = [0, 0, 1].$$

L'orientation de $\vec{n}_1$ est bien compatible avec celle de $\vec{n}_L$ car ils pointent tous deux vers l'extérieur du cylindre.

Il vient alors

$$\begin{aligned} \iint_{S_1^+} \text{rot } \vec{f} \cdot \vec{n}_1 \, d\sigma &= \int_0^R \int_0^{2\pi} [rh \cos \theta, -rh \sin \theta, -r^2 \cos^2 \theta] \cdot [0, 0, r] \, d\theta \, dr \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} -r^3 \cos^2 \theta \, d\theta \, dr \\ &= - \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 \frac{1}{2} (1 + \cos(2\theta)) \, d\theta \, dr \\ &= - \int_0^R \frac{r^3}{2} \left[\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2} \right]_0^{2\pi} \, dr = -\pi \int_0^R r^3 \, dr \\ &= -\frac{\pi R^4}{4}. \end{aligned}$$

Ainsi, le premier membre de la formule de Stokes vaut ici $-\frac{\pi R^4}{4}$.

Calculons à présent le second membre. En accord avec l'orientation de $\mathcal{S}^+$, un paramétrage de $\mathcal{C}^+$ est donné par

$$\vec{\gamma}(\theta) = [R \cos \theta, R \sin \theta, 0], \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Dès lors, le vecteur tangent unitaire $\vec{t}(\theta)$ est donné par

$$\vec{t}(\theta) = \frac{1}{\|D_\theta \vec{\gamma}(\theta)\|} D_\theta \vec{\gamma}(\theta).$$

On a

$$D_\theta \vec{\gamma}(\theta) = [-R \sin \theta, R \cos \theta, 0]$$

donc

$$\|D_\theta \vec{\gamma}\| = R$$

et

$$\vec{t}(\theta) = [-\sin \theta, \cos \theta, 0].$$

De là, on peut écrire

$$\begin{aligned} \oint_{C^+} \vec{f} \cdot \vec{t} ds &= \int_0^{2\pi} \vec{f}(R \cos \theta, R \sin \theta, 0) \cdot D_\theta \vec{\gamma}(\theta) \frac{\|D_\theta \vec{\gamma}\|}{\|D_\theta \vec{\gamma}\|} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} [R^3 \cos^2 \theta \sin \theta, 0, 0] \cdot [-R \sin \theta, R \cos \theta, 0] d\theta \\ &= -R^4 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta = -\frac{R^4}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2(2\theta) d\theta \\ &= -\frac{R^4}{8} \int_0^{2\pi} 1 - \cos(4\theta) d\theta = -\frac{R^4}{8} \left[\theta - \frac{\sin(4\pi)}{4} \right]_0^{2\pi} \\ &= -\frac{\pi R^4}{4}. \end{aligned}$$

Les deux membres de la formules sont donc égaux à $-\frac{\pi R^4}{4}$.

6. On considère le champ vectoriel $\vec{f} = [xy, -y^2]$.

- (a) Pour tout naturel strictement positif n , soit la courbe $\mathcal{C}_n$ d'équation $y = x^n$. Calculer l'intégrale curviligne du champ $\vec{f}$ le long de l'arc d'origine $(0, 0)$ et d'extrémité $(1, 1)$.
- (b) On considère le quart de circonférence centré à l'origine, de rayon 1, situé dans le premier quadrant et deux paramétrages de celui-ci:

$$\vec{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, \pi/2]; \quad \vec{\gamma}'(t) = (t, \sqrt{1-t^2}), \quad t \in [0, 1].$$

Déterminer l'intégrale curviligne de $\vec{f}$ le long de $\vec{\gamma}$ puis le long de $\vec{\gamma}'$.

Résolution

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}_0$. La courbe $\mathcal{C}_n$ d'équation $y = x^n$ peut être paramétrée par

$$\vec{\gamma}_n(t) = [t, t^n], \quad t \in [0, 1].$$

On a alors

$$D_t \vec{\gamma}_n(t) = [1, nt^{n-1}]$$

et l'intégrale curviligne vaut

$$\begin{aligned}
\int_{\vec{\gamma}_n} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz &= \int_0^1 \vec{f}(t, t^n) \cdot D_t \vec{\gamma}_n(t) dt \\
&= \int_0^1 [t^{n+1}, -t^{2n}] \cdot [1, nt^{n-1}] dt \\
&= \int_0^1 t^{n+1} - nt^{3n-1} dt \\
&= \left[\frac{t^{n+2}}{n+2} - \frac{t^{3n}}{3} \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{n+2} - \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

(b) L'intégrale curviligne de $\vec{f}$ le long de $\vec{\gamma}$ s'écrit

$$\begin{aligned}
\int_{\vec{\gamma}} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz &= \int_0^{\pi/2} \vec{f}(\cos t, \sin t) \cdot D_t \vec{\gamma}(t) dt \\
&= \int_0^{\pi/2} [\cos t \sin t, -\sin^2 t] \cdot [-\sin t, \cos t] dt \\
&= \int_0^{\pi/2} -2 \cos t \sin^2 t dt \\
&= \left[-\frac{2}{3} \sin^3 t \right]_0^{\pi/2} = -\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

D'autre part, l'intégrale curviligne de $\vec{f}$ le long de $\vec{\gamma}'$ s'écrit

$$\begin{aligned}
\int_{\vec{\gamma}'} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz &= \int_0^1 \vec{f}(t, \sqrt{1-t^2}) \cdot D_t \vec{\gamma}'(t) dt \\
&= \int_0^1 [t\sqrt{1-t^2}, t^2-1] \cdot \left[1, \frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}} \right] dt \\
&= \int_0^1 2t\sqrt{1-t^2} dt = \left[-\frac{2}{3}(1-t^2)^{3/2} \right]_0^1 \\
&= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$