Analyse II

Liste supplémentaire 2, solutions

Exercice 1 (a)
Avec $\gamma(t) = i + 2e^{it}$, $(t \in [0, 2\pi])$, on a successivement

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{1}{\bar z} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{-i + 2e^{-it}}\ 2ie^{it}\ dt \quad \text{(définition des intégrales curvilignes)}\\
&= \int_0^{2\pi} \frac{2ie^{it}}{e^{-it}(-ie^{it}+2)} dt\\
&= \int_0^{2\pi} \frac{2ie^{2it}}{2 - ie^{it}} dt\\
&= \int_{\gamma_0} \frac{2z}{2-iz} dz \quad \text{(définition des intégrales curvilignes)}
\end{aligned}$$

avec $\gamma_0(t) = e^{it}$ $(t \in [0, 2\pi])$. Comme la fonction $z \mapsto \frac{2z}{2-iz}$ est holomorphe dans $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{-2i\}$ et que γ_0 est homotope à un chemin constant dans cet ouvert, on a $\int_{\gamma_0} \frac{2z}{2-iz} dz = 0$ et par suite

$$\int_\gamma \frac{1}{\bar z} dz = 0$$

Exercice 1 (b)
la fonction $f\ :\ z \mapsto e^z - \cos z$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$; par la représentation intégrale de Cauchy, on a directement

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z^4} dz = \frac{2i\pi}{3!}\ \frac{3!}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-0)^{3+1}} dz = \frac{2i\pi}{3!} D^3 f(0) = \frac{i\pi}{3}.$$

Exercice 2
Rappelons d'abord que si z_0 est une singularité isolée pour la fonction holomorphe f, alors f se prolonge en une fonction holomorphe en z_0 si et seulement si f admet une limite finie en z_0.
Cela étant, la réponse à la question est "faux". De fait, en prenant $f(z) = \frac{1}{z^2}$, on obtient une fonction holomorphe f dans $\mathbb{C}_0 = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, avec $Res_0 f = 0$ et $\lim_{z\to 0} f(z) = \infty$.

Exercice 3 (a)
- On a $z^3 - 1 = (z-1)(z^2+z+1)$; les zéros du polynôme $z \mapsto z^2 + z + 1$ sont donc les racines cubiques complexes de 1, à savoir $z_1 = e^{2i\pi/3}$ et $z_2 = e^{4i\pi/3} = e^{-2i\pi/3}$. Il s'ensuit que la fonction donnée est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{-i, z_1, z_2\}$.
- Le seul zéro de f est 0 et sa multiplicité est 3 car f s'écrit

$$f(z) = z^3 g(z), \quad g(z) = \frac{1}{(z+i)^2(z^2+z+1)}, \text{ avec } g \text{ holomorphe au voisinage de 0 et } g(0) \neq 0.$$

- Les singularités isolées de f sont $-i, z_1$ et z_2;
$-i$ est un pôle double de f car

$$\lim_{z\to -i} (z+i)^2 f(z) = \lim_{z\to -i} \frac{z^3}{z^2+z+1} = \frac{i^3}{i} = -1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

z_1 et z_2 sont des pôles simples car

$$\lim_{z\to z_1} (z-z_1) f(z) = \lim_{z\to z_1} \frac{(z-z_1)z^3}{(z+i)^2(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{1}{(z_1+i)^2(z_1-z_2)} = \frac{-i\sqrt{3}}{3(z_1+i)^2} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

et de même pour z_2, à savoir

$$\lim_{z\to z_2}(z-z_2)f(z)=\lim_{z\to z_2}\frac{(z-z_2)z^3}{(z+i)^2(z-z_1)(z-z_2)}=\frac{1}{(z_2+i)^2(z_2-z_1)}=\frac{i\sqrt{3}}{3(z_2+i)^2}\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$$

Exercice 3 (b)
- La fonction f donnée est holomorphe dans le complémentaire des zéros de la fonction sin, à savoir dans $\mathbb{C}\setminus\{k\pi\ :\ k\in\mathbb{Z}\}$.
- La fonction f n'a aucun zéro.
- Pour tout entier k, le complexe $z_k=k\pi$ est une singularité isolée.

Si $k=0$, $z_0=0$ est un pôle d'ordre 1 car

$$\lim_{z\to 0}zf(z)=\lim_{z\to 0}\left(\frac{z}{\sin z}\right)^3=1\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$$

Si $k\neq 0$, il s'agit d'un pôle d'ordre 3 car

$$\lim_{z\to k\pi}(z-k\pi)^3f(z)=(-1)^k\lim_{z\to k\pi}\frac{(z-k\pi)^3z^2}{\sin^3(z-k\pi)}=(-1)^k(k\pi)^2\lim_{z\to 0}\left(\frac{z}{\sin z}\right)^3=(-1)^k(k\pi)^2\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$$

- Résidu en 0, pôle d'ordre 1:

$$Res_0 f=\lim_{z\to 0}zf(z)=1.$$

Résidu en $k\pi$ ($k\neq 0$), pôle d'ordre 3:

$$Res_{k\pi}f=\frac{1}{2}\lim_{z\to k\pi}D^2\left((z-k\pi)^3f(z)\right)=\frac{(-1)^k}{2}\lim_{z\to k\pi}D^2\left(\frac{(z-k\pi)^3}{\sin^3(z-k\pi)}z^2\right)=\frac{(-1)^k}{2}\lim_{z\to k\pi}D^2\left(\frac{(z-k\pi)^3}{\sin^3(z-k\pi)}z^2\right).$$

On a

$$\left(\frac{z-k\pi}{\sin(z-k\pi)}\right)^3=a_0+a_2(z-k\pi)^2+(z-k\pi)^4h(z)$$

au voisinage de $k\pi$, avec h holomorphe au voisinage de $k\pi$ et $h(k\pi)\neq 0$ donc

$$Res_{k\pi}f=\frac{(-1)^k}{2}\lim_{z\to k\pi}D^2\left(\left(a_0+a_2(z-k\pi)^2+(z-k\pi)^4h(z)\right)z^2\right)=(-1)^k\ (a_0+a_2k^2\pi^2).$$

Il reste donc à déterminer la valeur de a_0 et de a_2. En procédant (par exemple) par coefficients indéterminés, on a

$$\frac{z}{\sin z}=1+\frac{1}{6}z^2+z^4h(z)$$

au voisinage de 0, avec h holomorphe au voisinage de 0, non nulle en 0. De là, on tire

$$\left(\frac{z}{\sin z}\right)^3=\left(1+\frac{1}{6}z^2+z^4h(z)\right)^3=1+\frac{1}{2}z^2+z^4G(z)$$

au voisinage de 0, avec G holomorphe au voisinage de 0 et non nulle en 0 donc

$$\left(\frac{z-k\pi}{\sin(z-k\pi)}\right)^3=1+\frac{1}{2}(z-k\pi)^2+(z-k\pi)^4G(z-k\pi))$$

au voisinage de $k\pi$. Finalement $a_0=1$, $a_2=\frac{1}{2}$ et

$$Res_{k\pi}f=(-1)^k\ \left(1+\frac{1}{2}k^2\pi^2\right).$$

Exercice 4

Cas du développement en 0.

La fonction donnée étant holomorphe au voisinage de 0, le développement demandé en ce point est donc celui de Taylor. L'ouvert Ω où f est holomorphe étant $\mathbb{C}\setminus\{-i\}$, on a $r_0 = dist(0, \mathbb{C}\setminus\Omega) = dist(0, \{-i\}) = 1$ donc

$$f(z) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{D^m f(0)}{m!} z^m, \quad |z - 0| = |z| < r_0 = 1.$$

En utilisant la formule de Leibniz pour le produit $f(z) = z^3\ (z+i)^{-2}$, on obtient directement $D^m f(0) = 0$ $(m = 0, 1, 2)$ et, si $m \geq 3$

$$\begin{aligned} D^m f(0) &= C_m^{m-3}\ 3!\ \ D^{m-3}(z+i)^{-2}\big|_{z=0} \\ &= C_m^{m-3}\ 3!\ (m-2)!(-1)^{m-1} i^{1-m} \\ &= i^{m-1}(m-2)m! \end{aligned}$$

Il s'ensuit que l'on a

$$f(z) = \sum_{m=3}^{+\infty} i^{m-1}(m-2)z^m, \quad |z| <= 1.$$

Variante En vertu des résultats concernant la convergence des séries de puissances, on a

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{i}\ \frac{1}{1 - iz} = \frac{1}{i} \sum_{m=0}^{+\infty} i^m z^m, \quad |z| < 1$$

donc aussi

$$\frac{1}{(z+i)^2} = -D\frac{1}{z+i} = -\frac{1}{i} \sum_{m=1}^{+\infty} m\ i^m z^{m-1}, \quad |z| < 1$$

et

$$f(z) = \frac{z^3}{(z+i)^2} = -\frac{1}{i} \sum_{m=1}^{+\infty} m\ i^m z^{m+2} = \sum_{m=3}^{+\infty} (m-2)\ i^{m-1} z^m, \quad |z| < 1$$

Cas du développement en $-i$.

En $-i$, le polynôme $z \mapsto z^3$ a le développement de Taylor suivant

$$z^3 = \sum_{m=0}^{3} \frac{D^m z^3\big|_{z=-i}}{m!}(z+i)^3 = i - 3(z+i) - 3i(z+i)^2 + (z+i)^3, \quad z \in \mathbb{C}$$

donc

$$\frac{z^3}{(z+i)^2} = \frac{i}{(z+i)^2} - \frac{3}{z+i} - 3i + (z+i), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$$

Exercice 5

La fonction $f\ :\ x \mapsto \frac{x^2}{1+x^2+x^4}$ étant continue sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $x^2 f(x) = x^2|f(x)| \leq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$, elle est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Posons

$$f(z) = \frac{z^2}{z^4 + z^2 + 1}.$$

Cette fonction est holomorphe dans le complémentaire des zéros du dénominateur. Comme $X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1)$, on a $z^6 - 1 = (z^2-1)(z^4+z^2+1)$; il s'ensuit que les zéros du dénominateur sont les racines 6^{emes} complexes de l'unité, à savoir les complexes

$$z_k = e^{ik\pi/3},\ k = 1, 2, 4, 5.$$

Cela étant, si $R > 1$, soient $C_R(t) = Re^{it}, t \in [0, \pi]$, $\Gamma_R(t) = t, t \in [-R, R]$ et γ_R la juxtaposition de ces deux chemins. Le chemin γ_R est homotope à un chemin constant dans $\mathbb{C}$; par le théorème des résidus, on obtient donc

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_R} f(z)dz &= 2i\pi(\mathrm{Res}_{z_1} f + \mathrm{Res}_{z_2} f) \\
&= 2i\pi\left(\frac{z_1^2}{4z_1^3 + 2z_1} + \frac{z_2^2}{4z_2^3 + 2z_2}\right) = i\pi\left(\frac{z_1}{2z_1^2 + 1} + \frac{z_2}{2z_2^2 + 1}\right) \\
&= \frac{\pi\sqrt{3}}{3}(z_1 - z_2) = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}.
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| \leq \pi R \frac{R^2}{R^4 - R^2 - 1} \to 0 \text{ si } R \to +\infty$$

et

$$\int_{\Gamma_R} f(z)dz = 2\int_0^R \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} dx.$$

Ainsi,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^R \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}.$$

Exercice 6

(a') Oui pour $\Rightarrow$: si f se prolonge en une fonction holomorphe en z_0, sa limite en ce point est finie, donc

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)f(z) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \lim_{z \to z_0} f(z) = 0.$$

Non pour $\Leftarrow$: prendre $z_0 = 0$, $f(z) = \frac{1}{z}$.

(b') Oui pour $\Rightarrow$: si z_0 est une singularité essentielle pour f et si la limite $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$ existe, celle-ci est soit finie, soit infinie. Dans ce cas, z_0 est un pôle d'ordre fini (pouvant être 0) pout $z \mapsto (z-z_0)f(z)$ donc on peut écrire

$$(z - z_0)f(z) = (z - z_0)^p g(z)$$

au voisinage de z_0 (z_0 exclu) pour un entier p et une fonction holomorphe g au voisinage de z_0, non nulle en z_0; ceci implique que l'on a

$$f(z) = (z - z_0)^{p-1} g(z)$$

au voisinage de z_0 (z_0 exclu), donc aussi que z_0 est un pôle de z_0. D'où une contradition.

Oui pour $\Leftarrow$: si z_0 est un pôle pour f, on peut écrire $f(z) = (z - z_0)^p g(z)$ au voisinage de z_0 (z_0 exclu) pour un entier p et une fonction holomorphe g au voininage de z_0, non nulle en z_0; dès lors on a aussi $(z - z_0)f(z) = (z - z_0)^{p+1} g(z)$, ce qui entraîne que $\lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z)$ existe (elle est soit finie, soit infinie).

(c') Non pour $\Rightarrow$: par exemple, en un pôle dordre 1 on a $\lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z) \in \mathbb{C}_0$.

Oui pour $\Leftarrow$: si $\lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z)$ est infinie, alors z_0 est un pôle d'ordre fini non nul p pour $z \mapsto (z - z_0)f(z)$ donc un pôle d'ordre $p + 1$ pour f.