Analyse II

Suggestions pour les résolutions des exercices proposés au TD du 7 décembre 2007

Exercice 1 On fixe un repère orthonormé de l'espace. La formule de Stokes consiste en l'égalité suivante

$$\int\int_{\mathcal{S}^+} rot\vec{f} \bullet \vec{n}\ d\sigma = \oint_{\mathcal{C}^+} \vec{f} \bullet \vec{t}\ ds = \oint_{\mathcal{C}} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$$

où $\mathcal{S}$ est une surface régulière de frontière $\mathcal{C}$, que l'on a orientées en concordance.

D'une part, comme la surface $\mathcal{S}$ a pour équation cartésienne $z = 1-x^2-y^2$ avec $z \geq 0$, un paramétrage naturel de celle-ci est donné par

$$\vec{\varphi}(r,\theta) = [r\cos\theta, r\sin\theta, 1-r^2],\ r \in [0,1],\ \theta \in [0,2\pi].$$

On obtient alors

$$D_r\vec{\varphi}(r,\theta) \wedge D_\theta\vec{\varphi}(r,\theta) = [2r^2\cos\theta, 2r^2\sin\theta, r].$$

On a également

$$rot\vec{f}(x,y,z) = [-1,-1,-1].$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\int\int_{\mathcal{S}^+} rot\vec{f} \bullet \vec{n}\ d\sigma &= \int\int_{[0,1]\times[0,2\pi]} (rot\vec{f})(\vec{\varphi}(r,\theta)) \bullet \left(D_r\vec{\varphi}(r,\theta) \wedge D_\theta\vec{\varphi}(r,\theta)\right)\ drd\theta \\
&= -\int\int_{[0,1]\times[0,2\pi]} (2r^2\cos\theta + 2r^2\sin\theta + r)\ drd\theta \\
&= -\pi
\end{aligned}$$

D'autre part, un paramétrage de la courbe orientée $\mathcal{C}$ est $\vec{\gamma}(\theta) = [\cos\theta, \sin\theta, 0],\ \theta \in [0,2\pi]$. Il s'ensuit que

$$\oint_{\mathcal{C}^+} \vec{f} \bullet \vec{t}\ ds = \oint_{\mathcal{C}} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz = \int_0^{2\pi} [\sin\theta\,(-\sin\theta) + 0 + 0]\, d\theta = -\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2\theta)}{2} d\theta = -\pi.$$

Exercice 2 Un paramétrage du premier segment est

$$\vec{\gamma}_1(t) = [t,t,t],\ t \in [0,1].$$

Un paramétrage de l'arc du cercle $\mathcal{C}$ situé dans le premier octant est

$$\begin{aligned}
\vec{\gamma}_2(\theta) = \left[\sqrt{3}\cos(\frac{\pi}{4})\sin\theta, \sqrt{3}\cos(\frac{\pi}{4})\sin\theta, \sqrt{3}\cos\theta\right] &= \left[\frac{\sqrt{6}}{2}\sin\theta, \frac{\sqrt{6}}{2}\sin\theta, \sqrt{3}\cos\theta\right] \\
&= \left[\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\theta, \sqrt{\frac{3}{2}}\sin\theta, \sqrt{3}\cos\theta\right],\ \theta \in [0, \frac{\pi}{2}].
\end{aligned}$$

Le point A correspond au paramètre $\theta = \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$; un paramétrage de l'arc du cercle d'origine A et d'extrémité B est donc

$$\vec{\gamma}_2(\theta) = \left[\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\theta, \sqrt{\frac{3}{2}}\sin\theta, \sqrt{3}\cos\theta\right],\ \theta \in \left[\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Comme $B\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right)$, un paramétrage du second segment, orienté dans le sens opposé, est

$$\vec{\gamma}_3(t) = [t,t,0],\ t \in \left[0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right].$$

Il s'ensuit que l'intégrale demandée vaut

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f ds &= \int_{\vec\gamma_1} f ds + \int_{\vec\gamma_2} f ds - \int_{\vec\gamma_3} f ds \\ &= \int_0^1 t^3\sqrt{3}dt + \int_{\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}}^{\pi/2} \frac{9}{2}\sin^2\theta\cos\theta\ d\theta - \int_0^{\sqrt{3/2}} 0dt \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{2}\int_{\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}}^{\pi/2} D\sin^3\theta\ d\theta \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sin^3\left(\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

Exercice 3 *Fonction f.*
- Holomorphe dans $\mathbb{C}_0$.
- Zéros: $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}_0$, de multiplicité 1.
- Singularité isolée: 0; pôle d'ordre 5; résidu : $\frac{1}{5!}$ (direct en développant en série).

Fonction g.
- Holomorphe dans $\mathbb{C}_0$.
- Zéros: $z_k = \frac{2}{1+2k}$, $k \in \mathbb{Z}$, de multiplicité 1.
- Singularité isolée: 0; c'est une singularité essentielle et le résidu en cette singularité est nul (direct en développant en série de Laurent).

Exercice 4 π (direct par résidus ou par formule de représentation de Cauchy)

Exercice 5 *Première intégrale*

La fonction $x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^n}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et est majorée par $1/x^2$ dans le complémentaire de l'origine; elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}$.

Cela étant, d'une part, la fonction

$$f\ :\ z \mapsto \frac{1}{(z^2+1)^n}$$

étant holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ et vérifiant

$$\lim_{z\to i}(z-i)^n f(z) = \lim_{z\to i}\frac{1}{(z+i)^n} = \left(-\frac{i}{2}\right)^n \in \mathbb{C}_0,$$

elle admet i comme pôle d'ordre n et on a

$$Res_i f = \frac{1}{(n-1)!}\left[D^{n-1}\frac{1}{(z+i)^n}\right]_{z=i} = \frac{(2n-2)!}{i2^{2n-1}((n-1)!)^2}$$

D'autre part, pour tout $R > 1$, on considère le chemin γ_R, juxtaposition du chemin Γ_R constitué par le segment de droite $[-R, R]$ sur l'axe réel et le demi-cercle $\mathcal{C}_R$ centré à l'origine et de rayon R, orienté dans le sens trigonométrique et dont les points ont une partie imaginaire positive. Pour tout $R > 1$, on a

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = 2i\pi Res_i f = \int_{\Gamma_R} f(z)dz\ +\ \int_{\mathcal{C}_R} f(z)dz \quad \text{et} \quad \left|\int_{\mathcal{C}_R} f(z)dz\right| \le \frac{\pi R}{(R^2-1)^n}.$$

Il s'ensuit que

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)^n}dx = \frac{1}{2}\lim_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_R} f(z)dz = \frac{1}{2}\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} f(z)dz = i\pi\ Res_i f = \frac{\pi\ (2n-2)!}{2^{2n-1}((n-1)!)^2}$$

Seconde intégrale.

La fonction $x \mapsto \frac{\sqrt{|x|}}{x^4+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$, paire et après multiplication par x^2, sa limite en l'infini est finie; elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}$.

Considérons la fonction

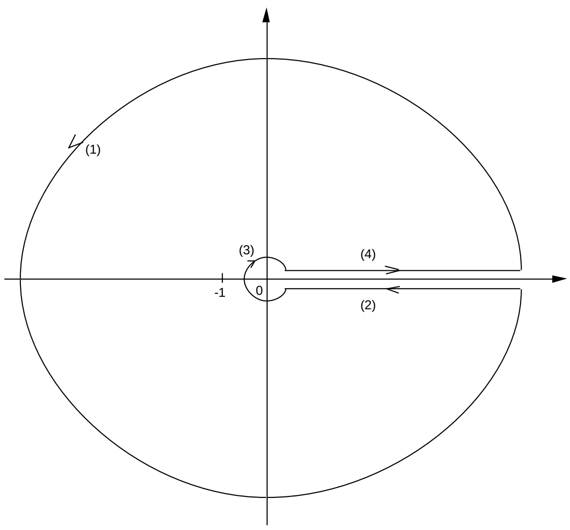
$$f(z) = \frac{z^{1/2}}{z^4+1} = \frac{e^{\frac{Log_0(z)}{2}}}{z^4+1}$$

holomorphe dans $\Omega_0 \setminus \{z_0, z_1, z_2, z_3\}$ avec $\Omega_0 = \mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$ et $z_k = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}$ ainsi que, pour tous réels $\varepsilon, \varepsilon', R$ tels que $0 < \varepsilon' < \varepsilon < 1 < R$, le chemin

$$\gamma_{\varepsilon,\varepsilon',R}$$

formé par la juxtaposition des quatre chemins suivants

$$\begin{aligned}
\gamma^{(1)}_{\varepsilon',R}(t) &= Re^{it}, & t &\in [\mathrm{arctg}(\frac{\varepsilon'}{\sqrt{R^2-\varepsilon'^2}}), 2\pi - \mathrm{arctg}(\frac{\varepsilon'}{\sqrt{R^2-\varepsilon'^2}})]\\
\gamma^{(3)}_{\varepsilon,\varepsilon'}(t) &= \varepsilon e^{-it}, & t &\in [\mathrm{arctg}(\frac{\varepsilon'}{\sqrt{\varepsilon^2-\varepsilon'^2}}), 2\pi - \mathrm{arctg}(\frac{\varepsilon'}{\sqrt{\varepsilon^2-\varepsilon'^2}})]\\
\Gamma^{(4)}_{\varepsilon,\varepsilon',R}(t) &= t + i\varepsilon', & t &\in [\sqrt{\varepsilon^2-\varepsilon'^2}, \sqrt{R^2-\varepsilon'^2}]\\
\Gamma^{(2)}_{\varepsilon,\varepsilon',R}(t) &= (-\Gamma)(t), & \Gamma(t) &= t - i\varepsilon',\ t \in [\sqrt{\varepsilon^2-\varepsilon'^2}, \sqrt{R^2-\varepsilon'^2}].
\end{aligned}$$



D'une part, comme le chemin $\gamma_{\varepsilon,\varepsilon',R}$ est homotope à un chemin constant dans Ω_0, le théorème des résidus fournit

$$\int_{\gamma_{\varepsilon,\varepsilon',R}} f(z)\ dz \ = \ 2i\pi \sum_{k=0}^{3} Res_{z_k} f \ = \ -\frac{i\pi}{2}\sum_{k=0}^{3} z_k e^{i\frac{\pi+2k\pi}{8}} \ = \ \pi\left(\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8}\right) = \pi\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}.$$

D'autre part, calculons (dans l'ordre)

$$\lim_{R\to+\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\varepsilon'\to 0}\int_{\gamma_{\varepsilon,\varepsilon',R}} f(z)dz.$$

Regardons ce qui se passe pour l'intégrand sur les deux segments de droite : pour tout $x > 0$, on a

$$\lim_{\varepsilon'\to 0}(f(x+i\varepsilon') - f(x-i\varepsilon')) = \frac{\sqrt{x} - (-\sqrt{x})}{x^4+1} = 2\frac{\sqrt{x}}{x^4+1}.$$

Dès lors, pour R, ε fixés, le théorème de Lebesgue donne

$$\lim_{\varepsilon'\to 0}\int_{\gamma_{\varepsilon,\varepsilon',R}} f(z)dz = 2\int_{\varepsilon}^{R}\frac{\sqrt{x}}{x^4+1}dx \ + \ \int_{\gamma^{(3)}_{\varepsilon,0}} f(z)dz \ \ + \ \int_{\gamma^{(1)}_{0,R}} f(z)dz.$$

On a
$$\left|\int_{\gamma^{(3)}_{\varepsilon,0}} f(z)dz\right| \leq 2\pi\varepsilon\ \frac{\sqrt{\varepsilon}}{1-\varepsilon^4} \quad \to 0 \text{ si } \varepsilon \to 0.$$
De même, on a
$$\left|\int_{\gamma^{(1)}_{0,R}} f(z)dz\right| \leq 2\pi R\ \frac{\sqrt{R}}{R^4-1} \quad \to 0 \text{ si } R \to +\infty.$$

Il s'ensuit que
$$\begin{aligned}\pi\left(\cos\frac{\pi}{8}-\sin\frac{\pi}{8}\right) = \pi\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8} &= \lim_{R\to+\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\varepsilon'\to 0}\int_{\gamma_{\varepsilon,\varepsilon',R}} f(z)dz \\ &= 2\lim_{R\to+\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{R}\frac{\sqrt{x}}{x^4+1}dx \\ &= \int_{\mathbb{R}}\frac{\sqrt{|x|}}{x^4+1}dx\end{aligned}$$

Remarque Vu la forme particulière du dénominateur, le contour formé par le segment $[\varepsilon, R]$, suivi du quart de cercle centré à l'origine, de rayon R joignant $(R,0)$ à $(0,R)$, du segment sur l'axe imaginaire joignant $(0,R)$ à $(0,\varepsilon)$ et du quart de cercle centré à l'origine, de rayon ε et joignant $(0,\varepsilon)$ à $(\varepsilon,0)$ permet aussi de trouver la solution. Dans ce cas, on ne doit même calculer qu'un seul résidu (en z_0).

Exercice 6 (a) Vrai car sinon $1/f$ est holomorphe dans Ω et $1/|f|$ atteint son maximum en un point de Ω. Il s'ensuit que f est constant dans Ω, ce qui est contradictoire

(b) Faux: prendre par exemple $f(z)=1/z$ et la suite $z_m = i/m,\ m\in\mathbb{N}_0$.

(c) Vrai: comme f admet une singularité essentielle en z_0, il n'est borné dans aucun voisinage de z_0; pour tout m, il existe donc $z_m\in\Omega$ tel que
$$|z_m - z_0| \leq \frac{1}{m} \quad \text{et} \quad |f(z_m)| \geq m.$$
La suite z_m ainsi construite convient.