Introduction à l'analyse de Fourier
Ajout aux transparents (cours du mardi 11 décembre 2007)

Si $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$ et si $m \in \mathbb{Z}$, on pose

$$u_m(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} e^{\frac{2i\pi m x}{b-a}},\ x \in \mathbb{R}.$$

Si $f \in L^2([a, b])$ on définit également la suite de sommes partielles suivante

$$S_M(f) = \sum_{m=-M}^{M} < f, u_m > \ u_m, \quad M \in \mathbb{N}_0.$$

<u>Résultats auxiliaires.</u>

Pour tout $M \in \mathbb{N}_0$, posons (noyau de Dirichlet)

$$D_M(t) = \begin{cases} \frac{\sin\left((2M+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} & \text{si } t \in]0, 2\pi[\\ 2M+1 & \text{si } t \in \{0, 2\pi\}. \end{cases}$$

Propriétés.
(1) Pour tout $M \in \mathbb{N}_0$, on a

$$D_M(t) = \sum_{m=-M}^{M} e^{imt}, \quad \int_0^{2\pi} D_M(t)\ dt \ = \ 2\pi.$$

(2) Pour toute fonction 2π-périodique f appartenant à $L^2([0, 2\pi])$ et pour tout $M \in \mathbb{N}_0$, on a

$$S_M(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_M(y) f(x-y)\ dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(3) Pour toute fonction f de classe C_1 par morceaux sur $[0, 2\pi]$, on a $f \in L^2([0, 2\pi])$ et

$$\lim_{M \to +\infty} S_M(f)(x) \ = \ f(x)$$

en tout $x \in]0, 2\pi[$ où f est dérivable.

Preuve. (1) Le premier point résulte d'une sommation de termes consécutifs d'une suite géométrique.

(2) On a successivement

$$\begin{aligned} S_M(f)(x) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-M}^{M} \int_0^{2\pi} f(y) e^{-imy} dy\ e^{imx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m=-M}^{M} e^{im(x-y)}\ f(y)\ dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m=-M}^{M} e^{imy}\ f(x-y)\ dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_M(y) f(x-y)\ dy. \end{aligned}$$

(3) Prolongeons f pp sur $\mathbb{R}$ par $2\pi-$ périodisation. Comme $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_M(y)f(x)dy$ pour tout M, on obtient

$$\begin{aligned} S_M(f)(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_M(y)\left(f(x-y)-f(x)\right)dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin\left((2M+1)\frac{y}{2}\right)\frac{f(x-y)-f(x)}{\sin(y/2)}dy \end{aligned}$$

Si $x \in]0,2\pi[$ est un point où f est dérivable, la fonction $y \mapsto \frac{f(x-y)-f(x)}{\sin(y/2)}$ admet une limite finie en 0^+ et en $(2\pi)^-$. Il s'ensuit qu'elle est intégrable sur $]0,2\pi[$. Ainsi, $S_M(f)(x) - f(x) \to 0$ si $M \to +\infty$ en utilisant les propriétés à l'infini des transformées de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$.$\square$

Sous les mêmes conditions que dans la partie (3), on montre de manière analogue que l'on a

$$\lim_{M\to+\infty} S_M(f)(x) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$$

en tout $x \in]0,2\pi[$, avec $f(x+)$ =limite à droite de f en x et avec $f(x-)$ =limite à gauche de f en x; on a aussi

$$\lim_{M\to+\infty} S_M(f)(0) = \lim_{M\to+\infty} S_M(f)(2\pi) = \frac{f(0^+)+f((2\pi)^-)}{2}$$

Théorème

Les fonctions u_m $(m \in \mathbb{Z})$ ***forment une suite orthonormée totale dans*** $L^2([a,b])$

Preuve. Un calcul direct montre que les fonctions sont orthogonales deux à deux et que leur norme dans $L^2([a,b])$ vaut 1.

Démontrons à présent que ces fonctions forment une suite totale. Pour plus de facilité dans les notations, considérons $a = 0$ et $b = 2\pi$.

Soit $f \in L^2([0,2\pi])$ tel que $< f, u_m >= 0$ pour tout m. Montrons que $f = 0$.
Vu le théorème d'approximation dans L^2, il existe une suite de fonction étagées α_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ qui converge vers f dans $L^2([0,2\pi])$; cette suite est donc telle que

$$\lim_{m\to+\infty} < f, \alpha_m >= \|f\|^2.$$

Vu les résultats auxiliaires précédents, pour tout m, on a

$$\lim_{M\to+\infty} S_M(\alpha_m)(x) = \alpha_m(x)$$

en tout réel x de $[0,2\pi]$ sauf un nombre fini d'entre eux; comme la suite est convergente dans $L^2([0,2\pi])$, on a aussi

$$\lim_{M\to+\infty} S_M(\alpha_m) = \alpha_m$$

dans $L^2([0,2\pi])$. Il s'ensuit que, pour tout m

$$< f, \alpha_m >= \lim_{M\to+\infty} < f, S_M(\alpha_m) >= 0$$

donc

$$0 = \lim_{m\to+\infty} < f, \alpha_m >= \|f\|^2$$

et par suite $f = 0$.$\square$

FB, December 12, 2007