Fonctions d'une variable complexe
AJOUT AU TRANSPARENT 18B (cours du mardi 13 novembre 2007)

A propos de la limite des valeurs d'une fonction holomorphe au voisinage d'une singularité isolée

(voir aussi EK, chapitre 16).

On considère un ouvert Ω de $\mathbb{C}$, un point $z_0 \in \Omega$ et une fonction holomorphe f dans $\Omega \setminus \{z_0\}$.

Pour rappel:
- la fonction f admet une limite finie en z_0 si et seulement si elle se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage de z_0 (compris)
- si p est un naturel positif ou nul et si $z \mapsto (z-z_0)^p f(z)$ est borné au voisinage de z_0 (exclu), alors z_0 est un pôle d'ordre p au plus
- z_0 est un pôle d'ordre p (naturel strictement positif) si et seulement s'il existe une fonction g, holomorphe au voisinage de z_0 (compris), non nulle en z_0 et telle que

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^p}, \quad z \text{ voisin de } z_0,\ z \neq z_0.$$

On reprend aussi les notations du théorème de Laurent.

On a (notamment) les propriétés suivantes

Propriétés de caractérisation

1. *Le complexe z_0 est un pôle d'ordre $p \in \mathbb{N}_0$ pour f si et seulement si la limite* $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^p f(z)$ *est finie et diffère de* 0
2. *Le complexe z_0 est un pôle d'ordre fini non nul pour f si et seulement si* $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$
3. *Le complexe z_0 est une singularité essentielle pour f si et seulement si* $\lim_{z\to z_0} f(z)$ *n'existe pas.*

Preuve. (1) Si z_0 est un pôle d'ordre $p \in \mathbb{N}_0$, on peut écrire

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^p}, \quad z \text{ voisin de } z_0,\ z \neq z_0$$

donc

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^p f(z) = g(z_0) \neq 0.$$

Réciproquement, si la limite $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^p f(z)$ est finie, on sait que z_0 est un pôle d'ordre au plus p; on peut donc écrire

$$f(z) = h(z) + \sum_{j=1}^{p} \frac{a_{-j}}{(z-z_0)^j}, \quad z \text{ voisin de } z_0,\ z \neq z_0$$

avec h holomorphe au voisinage de z_0 (inclusivement). On a $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^p f(z) = a_{-p}$; la non annulation de cette limite donne alors $a_{-p} \neq 0$ et H est donc un polynôme de degré p exactement.

(2) Si z_0 est un pôle d'ordre $p \in \mathbb{N}_0$, on peut écrire $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^p}$ au voisinage de z_0 (exclu) avec g holomorphe au voisinage de z_0 (inclus) et $g(z_0) \neq 0$. Dès lors $\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{g(z)}{(z-z_0)^p} = \infty$.

Réciproquement, si $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$, cela signifie notamment que f ne s'annule pas dans un voisinage de z_0 (exclu). Dès lors $F = 1/f$ possède une singularité isolée en z_0 et une limite nulle en z_0; la singularité isolée z_0 n'est donc pas une vraie singularité et la fonction F se prolonge en une fonction holomorphe en z_0, qui s'annule en z_0. On peut donc écrire $F(z) = (z-z_0)^\alpha g(z)$ au voisinage de z_0 (inclus), avec g

holomorphe au voisinage de z_0 (inclus), $g(z_0) \neq 0$ et $\alpha \in \mathbb{N}_0$. Dès lors, au voisinage de z_0 (exclu), on peut écrire $f(z) = \frac{1/g(z)}{(z-z_0)^\alpha}$ et z_0 est bien un pôle d'ordre α pour f.

(3) Supposons que z_0 soit une singularité essentielle pour f. Si la limite donnée existe, elle est soit finie, soit infinie. Elle ne peut être finie puisque dans ce cas f se prolonge holomorphiquement en z_0. Elle ne peut non plus être infinie puisque dans ce cas z_0 est un pôle d'ordre $p \in \mathbb{N}_0$. D'où la conclusion.

Réciproquement, si la limite donnée n'existe pas, z_0 ne peut être qu'une singularité essentielle puisque si c'est un pôle, la limite est soit finie (pôle d'ordre 0) soit infinie (pôle d'ordre strictement positif).$\square$

Il faut aussi bien remarquer qu'en un pôle d'ordre strictement positif, la partie réelle et la partie imaginaire de f peuvent se comporter différemment si z tend vers z_0 (bien que la limite de f soit infinie): examiner par exemple le comportement de $1/(z - z_0)$ pour diverses suites $z_m \to z_0$.

Pour illustrer le comportement au voisinage d'une singularité essentielle (voir aussi l'énoncé du théorème de Picard; plus généralement voir EK chapitre 16), on peut aussi tout simplement prendre $f(z) = e^{1/z}$ et examiner son comportement pour les suites $z_m = -1/m$ $(m \in \mathbb{N}_0)$, $z_m = 1/m$ $(m \in \mathbb{N}_0)$, $z_m = 1/(2im\pi)$ $(m \in \mathbb{N}_0)$, $z_m = 1/((2m + 1)i\pi)$ $(m \in \mathbb{N}_0)$.

Pour le lecteur intéressé, voici un résultat supplémentaire concernant les singularités essentielles.

<u>Propriétés des singularités essentielles</u> Soit z_0 une singularité essentielle pour f.

1. *Si en outre f diffère de 0 dans un voisinage de z_0 (exclu), alors z_0 est aussi une singularité essentielle pour $1/f$*
2. *Il existe une suite z_m qui converge vers z_0 et telle que $f(z_m)$ converge vers l'infini.*
3. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ il existe une suite z_m qui converge vers z_0 et telle que $f(z_m)$ converge vers α.*

Preuve. (1) Sinon, il existe un entier p et une fonction g holomorphe au voisinage de z_0, non nulle en z_0 telle que $1/f(z) = (z - z_0)^p g(z)$ au voisinage de z_0. Il s'ensuit que

$$f(z) = (z - z_0)^{-p}/g(z)$$

au voisinage de z_0. Dès lors f se prolonge en une fonction holomorphe (cas $p \leq 0$) ou z_0 est un pôle d'ordre p de f (cas $p \geq 0$).

(2) Cela résulte du fait que la fonction f n'est bornée dans aucun voisinage de z_0.

(3) Si, pour tout voisinage de z_0, f prend la valeur α en un point de ce voisinage, alors le résultat est acquis.

Supposons donc que f ne prenne pas la valeur α dans un voisinage de z_0. Il s'ensuit que la fonction $1/(f - \alpha)$ est holomorphe dans un voisinage de z_0 dont z_0 est exclu. Comme z_0 est une singularité essentielle de cette fonction, celle-ci n'est bornée dans aucun voisinage de z_0 . Il existe donc une suite z_m qui converge vers z_0 et telle que $1/(f(z_m) - \alpha)$ converge vers l'infini donc telle que $f(z_m)$ converge vers α.

$\square$

Signalons un résultat plus précis dû à Picard : si z_0 est une singularité essentielle de f alors pour tout voisinage V de z_0 inclus dans Ω, $f(V \setminus \{z_0\})$ est $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{C}$ privé d'un point.