

ANALYSE II

Liste "type" 1

Mardi 25 septembre 2007 (et mardi 02 octobre 2007)

REMARQUES pour les séances de répétition

- A la répétition: exercices *.
- Voir aussi la liste1 de 2006-2007 (disponible sur le web, y compris solutions)

Pour les NOTATIONS des vecteurs:

- chez EK: en gras (et souvent lettre minuscule); si un vecteur est donné par ses composantes, celles-ci sont séparées par des virgules, et entourées de crochets (les coordonnées de points sont entourées de parenthèses);
- au cours (et de façon naturelle chez plusieurs encadrants): \vec{v} ;
- provient de 1er bachelier: v

Rappel A-DERIVATION

1. 1.1) (*) Déterminer le domaine de définition et d'infinité dérivabilité des fonctions f, g, h données explicitement ci-dessous. Représenter ces domaines.
- 1.2) (*) Déterminer l'expression explicite de $|x|D_x g(x, y) + |y|D_y g(x, y)$.

$$f(x, y) = \ln \left(e^{x+y} - e^{\frac{1}{x-y}} \right), \quad g(x, y) = \arcsin \left(\frac{x}{y} \right), \quad h(x, y) = \sqrt{x^2 + y + 1}.$$

2. On donne la fonction g , dérivable sur $]1, +\infty[$ et de dérivée

$$g'(x) = Dg(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad x > 1.$$

On pose ensuite

$$F(x) = g \left(\frac{1+x^2}{1-x^2} \right).$$

On demande de trouver où la fonction F est dérivable et de déterminer l'expression de sa dérivée.

3. 3.1) (*) Déterminer dans quel ensemble la fonction de deux variables suivante (notée f) est continûment dérivable

$$f(x, y) = \ln(16 - 4x^2 - 4y^2)$$

et représenter graphiquement ce domaine (en le hachurant).

- Déterminer l'expression explicite de la fonction F définie par

$$F(t) = f(t-1, t+1).$$

- Déterminer le domaine de dérivabilité et l'expression explicite de la dérivée de F .

- 3.2) On donne une fonction f , continûment dérivable sur $]-2, 3[\times]0, +\infty[$. On demande le domaine de dérivabilité de la fonction F : $t \mapsto f(t^2 - 2t, e^{-t} - 1)$ et l'expression de sa dérivée première en fonction des dérivées partielles de f .

4. Exercice 1 p 403 EK

Rappel B-INTEGRATION à une, deux et trois variables

1. Pour chacun des cas suivants, déterminer si f_j (*:1,2,3,8,9) est intégrable sur A .

$$f_1(x) = \frac{1}{\sin x}, \quad A = [-1, 1]; \quad f_2(x) = \frac{x}{\sin x}, \quad A = [-1, 1]; \quad f_3(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}, \quad A = [0, +\infty[;$$

$$f_4(x) = \frac{x^2}{1+x^3}, \quad A = [0, +\infty[; \quad f_5(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}}, \quad A =]0, 1] \text{ et } A = [1, +\infty[; \quad f_6(x) = e^{-|x|}, \quad A = \mathbb{R}$$

$$f_7(x) = \frac{x}{e^x - 1}, \quad A = [0, +\infty[; \quad f_8(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, \quad A =]0, 1]; \quad f_9(x) = e^{-ix}, \quad A = [0, +\infty[.$$

2. Calculer l'aire de la partie du plan dont une description analytique est la suivante

$$\{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \text{ et } 0 \leq y \leq \inf\{e^{-x}, e^x\}\}.$$

Donner aussi une représentation graphique de cet ensemble.

(*) Même question pour

$$\{(x, y) : x \in [0, 2\pi], y \in \mathbb{R} \text{ et } \sin x \leq y \leq \cos x\}.$$

3. Permuter les intégrales et représenter l'ensemble d'intégration dans les cas suivants

$$a) \int_{-2}^2 \left(\int_{-1}^{-x/2} f(x, y) dy \right) dx, \quad b) \int_{-1}^0 \left(\int_{-3x-4}^0 f(x, y) dy \right) dx \quad c)(*) \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_y^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx \right) dy.$$

4. a) (*) Calculer l'intégrale de $f(x, y) = y^2 \sin(xy)$ sur $A = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 1]$.

b) Calculer l'intégrale de $f(x, y) = \cos(x + y)$ sur $A = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \pi]$.

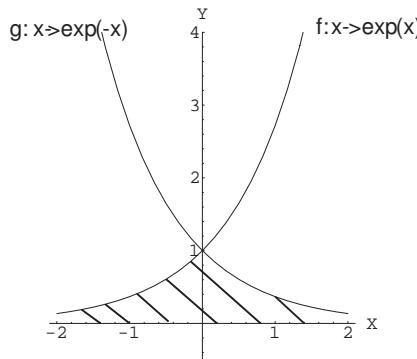
c) Calculer l'intégrale de $f(x, y) = x + y$ sur $A = \{(x, y) : 0 \leq y \leq \inf\{x, \sqrt{1-x^2}\}\}$.

5. On considère l'ensemble $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \inf\{e^{-x}, \ln(x+e)\}\}$.

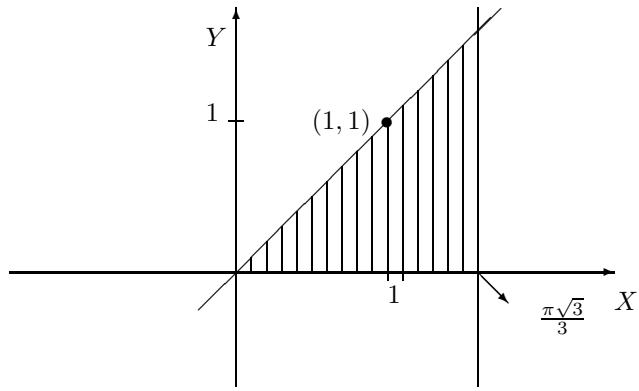
Représenter graphiquement A .

Ecrire l'intégrale $\int \int_A f(x, y) dx dy$ sous forme de deux intégrales successives par rapport à x puis à y (resp. par rapport à y puis à x).

6. a) Calculer l'intégrale de $f(x, y) = x + y$ sur l'ensemble fermé hachuré suivant (et donner une description analytique de cet ensemble)



b) (*) Calculer l'intégrale de $f(x, y) = x^2 \sin(xy)$ sur l'ensemble borné, fermé hachuré suivant et donner une description analytique de cet ensemble



7. Déterminer si les intégrales suivantes existent; si oui, les calculer. Représenter géométriquement l'ensemble d'intégration dans chaque cas.

$$a) \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{x^2} \frac{xe^{-x^2}}{x^2 + y} dy \right) dx, \quad b) \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{x^2} \frac{e^{-x^2}}{x^2 + y} dy \right) dx,$$

$$c) \int_0^1 \left(\int_y^{+\infty} \frac{\sqrt{y}}{x^2 + y^2} dx \right) dy, \quad d) \int_{-1}^1 \left(\int_0^{x^2} \frac{1}{x + y} dy \right) dx$$

8. Calculer l'intégrale de $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ sur $A = \{(x, y) : x \geq 0, y \leq 0, x^2 + y^2 \leq 4\}$.

De même, calculer l'intégrale de $f(x, y) = x^3 + y^3$ sur $A = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ (a et b sont des réels strictement positifs) et donner une représentation graphique de A dans un repère orthonormé.

9. (*) Soit A la surface fermée du plan bornée par les cercles de rayon respectivement 1, 2, centrés à l'origine et l'axe X . Calculer l'intégrale de $f(x, y) = 1 + 3x + 8y^2$ sur A .

10. On demande de justifier l'existence et de calculer l'intégrale

$$\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} e^{\frac{y-x}{y+x}} dy \right) dx.$$

(Ecrire cette intégrale comme une intégrale double et ensuite effectuer un changement de variables au moyen des relations $2x = u + v$, $2y = u - v$.)

11. L'intégrale suivante a-t-elle un sens? Si oui, la calculer.

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx.$$

12. L'intégrale suivante a-t-elle un sens? Si oui, la calculer.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1 - x^2} dx.$$

(Suggestion: transformer $\ln x$ en une intégrale: $\ln x = \int_0^{+\infty} \left(\frac{x^2}{1+x^2 y} - \frac{1}{1+y} \right) dy$; permutez alors les intégrales.)

En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx$ et de $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x} dx$, puis la valeur de $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2}$ et de $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m^2}$.

13. Voir aussi les exercices résolus ou proposés aux pages 437-439 de EK

14. Application du théorème des intégrales paramétriques.

14.1) (*) Soit un réel a et soit une fonction f telle que $t \mapsto f(t)e^{-at}$ soit intégrable sur $]0, +\infty[$. Montrer que la fonction

$$x \mapsto F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt$$

est dérivable sur $]a, +\infty[$ et que, dans cet intervalle, on a

$$DF(x) = - \int_0^{+\infty} te^{-xt} f(t) dt.$$

14.2) Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x} e^{-px} dx$$

pour tous réels a, b et tout $p > 0$ (si p est complexe de partie réelle strictement positive, il s'agit en fait de la transformée de Laplace (en p) unilatérale de la fonction $x \mapsto \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x}$).

14.3) Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(ax) - \arctan(bx)}{x} dx, \quad (a, b > 0); \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + a)^n} dx, \quad a > 0, n \in \mathbb{N}_0.$$

14.4) Soit

$$F(t) = \int_0^1 \frac{x^t - 1}{\ln x} dx, \quad t > -1.$$

- Montrer que cette fonction est bien définie et est continûment dérivable sur $]-1, +\infty[$.

- Calculer $F(0)$.

- Montrer que $DF(t) = \frac{1}{t+1}$.

- En déduire l'expression explicite (pas sous forme d'intégrale) de F .

Rappel C-CALCUL VECTORIEL

1. On fixe une base orthonormée de l'espace notée $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ et on donne les vecteurs

$$\vec{u} = 3\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3, \quad \vec{v} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_3, \quad \vec{w} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3.$$

- dans la base donnée, déterminer les composantes de $2\vec{u} - \vec{u} \wedge \vec{w}$ et de $\vec{u} \bullet \vec{v}\vec{w}$

- déterminer la norme de $\vec{u} + 3\vec{v}$

- déterminer la nature des expressions suivantes (si elles ont un sens);

$$\vec{u} \bullet \vec{v} \bullet \vec{w}, \quad \vec{v} \wedge (\vec{u} \bullet \vec{v})\vec{u}, \quad \vec{u} \bullet \vec{w} \vec{u}, \quad (\vec{u} \wedge \vec{w})\vec{u}, \quad (\vec{u} \wedge \vec{w}) \bullet \vec{u}$$

- les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont-ils linéairement indépendants ou dépendants? Pourquoi?

- si les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont linéairement indépendants, déterminer les composantes de \vec{e}_2 dans la base qu'ils forment.

2. On fixe une base orthonormée de l'espace et les vecteurs \vec{x}, \vec{v} respectivement de composantes $(1, 2, 2), (1, -1, 0)$.

- Donner une représentation du vecteur \vec{x} .

- Déterminer les composantes de la projection orthogonale de \vec{x} sur la droite vectorielle engendrée par \vec{v} .

- Déterminer les composantes de la projection orthogonale du vecteur \vec{x} sur le plan déterminé par les vecteurs de composantes $(1, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$.

ANALYSE II

Liste "type" 1

Solutions

La plupart des exercices sont ceux de la liste 1 de 2006-2007; les solutions aux exercices de cette liste sont disponibles en format pdf (par exemple sur le site web www.ifo.ulg.ac.be)

Ci-dessous sont présentés les solutions aux exercices qui figurent dans cette liste 1 2007-2008 mais dans aucune de 2006-2007.

Exercice 1.1), fonction f

Les domaines de définition et d'infinité dérivabilité sont les mêmes. Il s'agit de l'ensemble

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y \text{ et } x^2 - y^2 > 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y \text{ et } x^2 - y^2 < 1\}$$

c'est-à-dire de l'union des deux ensembles suivants:

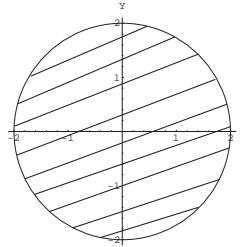
- l'ensemble des points du plan situés au-dessus de la première bissectrice (d'équation $x = y$) et "entre" les branches de l'hyperbole équilatère d'équation cartésienne $x^2 - y^2 = 1$ (dont les asymptotes sont les droites d'équation $x = y$ et $x = -y$);
- l'ensemble des points du plan situés à droite de la branche de droite de cette même hyperbole.

Exercice 3.1)

La fonction est continûment dérivable dans

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 > x^2 + y^2\}$$

qui est la surface intérieure au cercle (circonférence) d'équation cartésienne $x^2 + y^2 = 4$ (les points de cette circonférence n'étant pas compris dans l'ensemble).



L'expression explicite de F est

$$F(t) = \ln(16 - 4(t-1)^2 - 4(t+1)^2) = \ln(16 - 4t^2 + 8t - 4 - 4t^2 - 8t - 4) = \ln(8 - 8t^2) = 3 \ln 2 + \ln(1 - t^2)$$

La fonction F est dérivable dans $]-1, 1[$ et, dans cet ensemble, on a

$$DF(t) = D \ln(1 - t^2) = -2 \frac{t}{1 - t^2}.$$

Exercice 14.1)

Il s'agit d'une application du théorème des intégrales paramétriques avec $A =]0, +\infty[$ comme ensemble d'intégration (variable notée t) et $\Lambda =]a, +\infty[$ comme ouvert de variation du paramètre (paramètre noté x).

Seule la majoration uniforme de la dérivée première n'est pas immédiate. Suggestion: si K est un compact inclus dans Λ , alors il existe $r > a$ tel que $K \subset [r, +\infty[$. Il s'ensuit que

$$|D_x(e^{-xt} f(t))| = te^{-xt} |f(t)| \leq e^{-at} |f(t)| te^{-(r-a)t} \leq C e^{-at} |f(t)| \quad \forall x \in K, t > 0.$$

Exercice 14.4)

Montrons que F est bien défini c'est-à-dire que $x \mapsto f(x, t) = \frac{x^t - 1}{\ln x}$ est intégrable sur $]0, 1[$ pour tout $t > -1$.

- la fonction $f(., t)$ est continue sur $]0, 1[$
- intégrabilité en 1^- : le théorème de l'Hospital montre que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x, t) = 1 \in \mathbb{R}$; la fonction est donc intégrable en 1^-
- intégrabilité en 0^+ lorsque $t \geq 0$: on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x, t) = 0 \in \mathbb{R}$; la fonction est donc intégrable en 0^+
- intégrabilité en 0^+ lorsque $-1 < t < 0$: on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-t} f(x, t) = 0 \in \mathbb{R}$; la fonction est donc intégrable en 0^+ .

La seconde étape consiste alors à appliquer le théorème des intégrales paramétriques. Tout est direct, sauf peut-être l'estimation uniforme de la dérivée.

Suggestion: on a $D_t f(x, t) = x^t$. Majoration lorsque $t \in [r, 0]$ avec $-1 < r < 0$: $\sup_{t \in [r, 0]} |D_t f(x, t)| = x^t \leq x^r \in L^1(]0, 1[)$; majoration lorsque $t \in [0, R]$ avec $R > 0$: $\sup_{t \in [0, R]} |D_t f(x, t)| = x^t \leq 1 \in L^1(]0, 1[)$.

Les intégrales paramétriques donnent

$$DF(t) = \int_0^1 D_t f(t, x) dx = \int_0^1 x^t dx = \frac{1}{t+1}, \quad \forall t > -1$$

donc

$$F(t) = \ln(t+1) + \text{constante}, \quad \forall t > -1.$$

Comme $F(0) = 0$, on trouve $\text{constante} = 0$ et finalement

$$\int_0^1 f(t, x) dx = \ln(t+1), \quad \forall t > -1.$$