Analyse II

Liste “type” 5

Mardi 30 octobre 2007, mardi 6 novembre 2007

REMARQUES pour les séances de répétition
- A la répétition: exercices *
- A ce stade, je n'ai pas encore vu le théorème des résidus. Toutes les intégrales données se calculent soit directement (parfois en décomposant les fractions en fractions simples), soit en utilisant la formule intégrale de Cauchy (et conséquence quant à la représentation des dérivées).

Brefs RAPPELS de définitions, notations

Intégrales curvilignes dans le cadre complexe

Si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$ ($f(z) = $ “$f(x,y)''$ avec $z = (x,y) = x + iy$, x, y réels) et si $f\ :\ \Omega \to \mathbb{C}$ est continu, on pose

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\vec{\gamma}} f\ dx + if\ dy$$

avec $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2\ :\ [a,b] \to \Omega$ de classe C_1 (par morceaux), avec γ_1, γ_2 à valeurs réelles, $\vec{\gamma} = [\gamma_1, \gamma_2]$. Un calcul direct donne ainsi

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\vec{\gamma}} f(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\ D_t\gamma(t)\ dt = \int_{\vec{\gamma}} f(\gamma(t))\ D_t\gamma(t)\ dt.$$

Fonction(s) logarithme(s) (utilisant la “valeur principale” de l'argument et d'autres)

Pour rappel, on définit la fonction Ln dans $\Omega = \mathbb{C} \setminus (]-\infty, 0])$ par $Ln(z) = \ln|z| + iArg(z)$, avec $Arg : \Omega \to]-\pi, \pi[$. Cette fonction est holomorphe dans Ω et $DLnz = \frac{1}{z}$ dans Ω.

De la même manière, mais avec les déterminations adéquates de l'argument, on définit d'autres logarithmes holomorphes dans le plan complexe privé d'une demi-droite.

Si α est complexe, la fonction “puissance α”, à savoir $z \mapsto z^\alpha$ est définie dans Ω par $z^\alpha = e^{\alpha Lnz}$, y est holomorphe et y vérifie $Dz^\alpha = \alpha z^{\alpha-1}$. On définit de manière analogue d'autres fonctions “puissance α ” à l'aide des autres définitions du logarithme.

FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE, 2eme partie

On désigne par $\mathcal{O}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$.

1. (*) Soit $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, Ω connexe. Démontrer que s'il existe une constante C telle que $|f| = C$ dans Ω, alors f est constant dans Ω.

2. On suppose Ω connexe. Si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, démontrer que $\overline{f} \in \mathcal{O}(\Omega)$ si et seulement si f est constant.

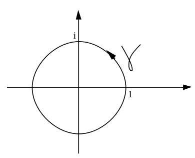
3. Soit $f \in C_2(\Omega)$. Démontrer que $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ si et seulement si on a ($\Delta f = 0$ et $\Delta(zf) = 0$) dans Ω.

4. a) (*) Où les fonctions suivantes sont-elles holomorphes?

$$f_1(z) = \frac{1}{e^z - 1},\quad f_2(z) = \frac{1}{e^{iz} + i},\quad f_2(z) = \frac{\sin z}{\sinh z},\quad f_3(z) = \frac{1}{(z^2 + z + 1)^2}$$

b) (*) Où la fonction suivante est-elle holomorphe? Quelles en sont les singularités isolées[1]?

$$f(z) = \frac{1}{\sin(1/z)}.$$

5. (*) Si γ désigne le chemin simple régulier suivant 

, calculer

$$a) \int_\gamma \Re z\ dz,\quad b) \int_\gamma e^{z^2}\ dz,\quad c) \int_\gamma \frac{1}{z-2}\ dz\quad d) \int_\gamma \frac{1}{z - \frac{1}{2}}\ dz,\quad e) \int_\gamma \frac{1}{z - \frac{i}{2}}\ dz,\quad f) \int_\gamma \frac{\sin z}{(z - \frac{1}{2})^2}\ dz$$

[1] un complexe z_0 est appelé singularité isolée de f si f est holomorphe dans une boule centrée en z_0 excepté en z_0

6. (*) EK, p657; 1,2,3,4

7. a) (*) Est-il possible de calculer $Ln\left((1+i)^i\right)$? Pourquoi? Si la réponse est affirmative, calculer ce complexe.
   b) On pose $f_+(z) = Ln(1+iz)$ et $f_-(z) = Ln(1-iz)$ et $f(z) = f_+(z) - f_-(z)$. Où cette fonction f est-elle holomorphe?
   c) Montrer que la restriction à $\mathbb{R}$ de la fonction if est une fonction à valeurs réelles. Déterminer cette fonction.
   d) (*) Où la fonction $z \mapsto \frac{z^{1/2}}{z-i}$ est-elle holomorphe?

8. (*) EK, p657; 8,11,14

9. (*) Si $a > 1$ calculer l'intégrale suivante en utilisant la technique des fonctions holomorphes.

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \cos x} dx.$$

10. (*) La fonction $z \in \mathbb{C} \mapsto \sin z$ est-elle bornée? Pourquoi?

11. (*) Soit la proposition suivante: "la fonction $z \mapsto e^{-z^2}$ tend vers 0 à l'infini". Cette proposition est-elle vraie? fausse? Pourquoi?

    Pourquoi la proposition suivante est-elle fausse? "Il existe une fonction f holomorphe dans la boule ouverte centrée à l'origine et de rayon 2, qui s'annule en 0 et telle que $f(z) > 0$ pour $|z| = 1$.

12. Montrer que si f est holomorphe dans $\mathbb{C}$ et si $z \mapsto \frac{f(z)}{z}$ est borné dans $\mathbb{C}_0$ alors la fonction f est un multiple de la fonction $z \mapsto z$.

13. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}^2$). Pour rappel, une fonction u de classe C_2 dans Ω est dite harmonique dans Ω lorsqu'elle est annulée par le laplacien:

$$\Delta u = D_x^2 u + D_y^2 u = 0.$$

    Si u est à valeurs réelles, une fonction v de classe C_2 dans Ω, à valeurs réelles, telle que $F = u + iv$ soit holomorphe dans Ω est appelée *conjugué harmonique de* u dans Ω.

    Une fonction harmonique u dans un ouvert Ω, à valeurs réelles, admet-elle toujours un conjugué harmonique dans Ω? Pourquoi? Quelle condition (standard) sur l'ouvert Ω peut-on imposer afin qu'un tel conjugué harmonique existe? Pourquoi?

    Appliquer ce qui précède à la fonction u définie par $u(z) = u(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2}) = \ln(|z|)$ (avec $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$).

FB, December 17, 2007(V1:25-09-06)

Analyse II

Liste “type” 5

Solutions

Les solutions sont disponibles en format pdf (par exemple sur le site web www.afo.ulg.ac.be) (solutions à la liste 5 de 2006-2007). Seul changement: exercice numéro 2.

Exercice 2. Si f et $\overline{f}$ sont holomorphes, il en est de même de $\Re f = \frac{f+\bar{f}}{2}$ et de $\Im f = \frac{f-\bar{f}}{2i}$. Ces deux fonctions étant à valeurs réelles, holomorphes, elles sont donc constantes dans le connexe Ω; dès lors f l'est aussi.

Toute fonction constante étant holomorphe, la réciproque est claire.