Analyse II

Liste “type” 6

Mardi 06 novembre 2007, mardi 13 novembre 2007

REMARQUES pour les séances de répétition
- A la répétition: exercices *

FONCTIONS D’UNE VARIABLE COMPLEXE, 2eme partie, suite

RAPPELS et quelques compléments (aux transparents et à EK) concernant les séries de puissances.

Définition

On appelle série de puissances au point $z_0 \in \mathbb{C}$, une série de la forme

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m (z - z_0)^m.$$

Les nombres complexes $a_0, a_1, \ldots$ sont les coefficients de cette série.

Convergence des séries de puissances.

La convergence des séries de puissances est régie par le théorème suivant (théorème d’Abel).
Soit $R > 0$. S’il existe $C > 0$ tel que $|a_m R^m| \leq C$ pour tout m alors la série de puissances converge absolument et uniformément dans tout compact de la boule ouverte de centre z_0 et de rayon R.

Ce résultat affirme en particulier que si la série $S(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (z - z_0)^m$ converge pour $z \neq z_0$, alors elle converge absolument et uniformément dans toute boule fermée de centre z_0 et de rayon strictement inférieur à $|z - z_0|$. Il permet aussi de définir la notion de rayon et de disque de convergence d’une série.

Rayon et disque de convergence

Soit $\mathcal{R}$ l’ensemble non vide $\mathcal{R} = \{r \geq 0 \ : \ S(z) \text{ converge si } |z - z_0| \leq r\}$.

Si cet ensemble n’est pas borné, la série converge absolument et uniformément dans tout compact du plan complexe.

Si cet ensemble est borné et si sa borne supérieure est nulle, la série ne converge qu’en z_0.

Si la borne supérieure, notée R, est strictement positive, alors la série converge absolument et uniformément dans tout compact de la boule ouverte de centre z_0 et de rayon R; de plus, si $|z-z_0| > R$ alors la suite $a_m(z - z_0)^m$ ($m \in \mathbb{N}$) n’est pas bornée. Dans ce cas, R est aussi caractérisé par les propriétés suivantes:
- $|z - z_0| > R \Rightarrow$ la suite $a_m(z - z_0)^m$ ($m \in \mathbb{N}_0$) n’est pas bornée (resp. la série $S(z)$ ne converge pas)
- $|z - z_0| < R \Rightarrow$ la série de puissances converge en z.

Le rayon de convergence de la série de puissances $S(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (z - z_0)^m$ est le nombre R défini ci-dessus. Dans le cas où la série converge en tout point de $\mathbb{C}$, on dit que le rayon de convergence vaut $+\infty$. Le disque de convergence de cette série est la boule ouverte de centre z_0 et de rayon R si $R \in \mathbb{R}$. Il s’agit donc de l’union de tous les disques ouverts de centre z_0 dans lesquels la série converge.

Le rayon de convergence R d’une série de puissances peut se calculer de la manière suivante.
Soit $L = \lim_{p\to+\infty} \sup_{p\leq m} |a_m|^{1/m}$. On a $R = 0$ si $L = +\infty$, $R = 1/L$ si $L \in]0, +\infty[$ et $R = +\infty$ si $L = 0$.

En particulier,
- si la limite $l = \lim_{m\to+\infty} |a_m|^{1/m}$ existe ($\in \mathbb{R}$ ou égal à l’infini), alors $L = l$
- si la limite $l = \lim_{m\to+\infty} |a_{m+1}/a_m|$ existe ($\in \mathbb{R}$ ou égal à l’infini), alors $l = \lim_{m\to+\infty} |a_m|^{1/m} = L$.

Holomorphie et dérivation terme à terme

On démontre[1] que toute série de puissances définit une fonction holomorphe dans son disque de convergence et y est dérivable terme à terme.

[1]Utilisation du théorème de Weirstrass qui affirme que si une suite f_m ($m \in \mathbb{N}_0$) de fonctions holomorphes dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ converge uniformément sur tout compact de cet ouvert vers une fonction f, alors f est holomorphe dans l’ouvert et $D^k f_m$ ($m \in \mathbb{N}_0$) converge uniformément vers $D^k f$ sur tout compact de Ω quel que soit le naturel k

Développement des fonctions holomorphes en série de puissances (Taylor)

Si f est une fonction holomorphe dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et $z_0 \in \Omega$, on a

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^m}{m!} D_z^m f(z_0)$$

dans la boule ouverte de centre z_0 et de rayon $\mathrm{dist}(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega)$.

EXERCICES

On désigne par $\mathcal{O}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$.

1. - (*) Déterminer le disque de convergence des séries suivantes

$$a)\ \sum_{m=1}^{+\infty} m!\ z^m; \quad b)\ \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{z^m}{m!}; \quad c)\ \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(z-i)^{2m}}{m^3}$$

$$d)\ \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(z-1)^m}{2^m (m!)^2}; \quad e)\ \sum_{m=1}^{+\infty} 4^m\ (z-2)^m; \quad f)\ \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^m\ (iz-1)^m$$

   - Voir aussi EK p 677

2. (*) Développer les fonctions suivantes[2] en série de puissances au point z_0 et préciser l'ensemble dans lequel le développement a lieu.

$$a)\ \frac{1}{z^2+1},\ z_0 = 0; \quad b)\ \frac{1}{z},\ z_0 = 1; \quad c)\ \frac{z}{z^2-1},\ z_0 = 0; \quad d)\ \frac{z}{(z-1)(z+2)},\ z_0 = 0$$

$$e)\ \frac{1}{1+z+z^2},\ z_0 = 0; \quad f)\ \frac{\sin z}{z},\ z_0 = 0; \quad g)\ \frac{1-\cos z}{z^2},\ z_0 = 0; \quad h)\ \frac{e^z}{1-z},\ z_0 = 0.$$

3. En procédant par coefficients indéterminés, montrer que

$$(*) \left(\frac{z}{\sin z}\right)^2 = 1 + \frac{z^2}{3} + \frac{z^4}{15} + \ldots \qquad |z| < \pi$$

   Même question pour

$$e^{z/\cos z} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{2z^3}{3} + \ldots \qquad |z| < \frac{\pi}{2}.$$

4. (*) On donne S et F par

$$S(z) = \sum_{m=1}^{+\infty} m^2 z^m, \quad F(z) = \frac{z+z^2}{(1-z)^3}.$$

   Où ces fonctions sont-elles holomorphes (resp. égales)? En déduire la valeur de la somme $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m^2}{2^m}$.

5. Déterminer le disque de convergence et la somme des séries suivantes

$$S_1(z) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{z^m}{m}, \quad S_2(z) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{z^m}{m(m+1)}.$$

6. Soit f holomorphe dans $\mathbb{C}$. Montrer que si $\Re f$ (resp. $\Im f$) est borné, alors f est constant.

7. Si f est holomorphe dans Ω et si z_0 est un zéro d'ordre p pour f, montrer que

$$|f(z)| \leq \frac{|z-z_0|^p}{r^p} \sup_{\{u\ :\ |u-z_0|=r\}} |f(u)|$$

   si $|z-z_0| < r$ et $0 < r < dist(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega)$.

8. (*) On suppose f et g holomorphes dans l'ouvert connexe Ω. Montrer que si le produit de f et g est nul en tout point de Ω alors f est nul en tout point de Ω ou g est nul en tout point de Ω.

FB, October 31, 2007(V1:25-10-06)

[2]Le résultat suivant sera démontré dans la suite : Si f est holomorphe dans $\omega \setminus \{z_0\}$ (ω=voisinage de z_0) et si $\lim_{z \to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$ alors f se prolonge en une fonction holomorphe dans ω

Analyse II

Liste "type" 6

Solutions

Les solutions sont disponibles en format pdf (par exemple sur le site web www.afo.ulg.ac.be) (solutions à la liste 6 de 2006-2007).