Analyse II

Liste supplémentaire numéro 1 (listes 1-3)

COMPLEMENTS aux transparents du cours (analyse vectorielle)

Sur l'invariance (caractère intrinsèque) du gradient, de la divergence, du rotationnel.

Voir par exemple [EK], sections 9.7, 9.8, 9.9.

Utilisation et signification du gradient, de la divergence, du rotationnel, des formules de Green, de Gauss (divergence) et de Stokes[1].

Le Laplacien et le théorème de Green.

In physics and mathematics, Green's theorem (in two dimensions) gives the relationship between a line integral around a simple closed curve C and a double integral over the plane region D bounded by C. It is the two-dimensional special case of the more general Stokes' theorem, and is named after British scientist George Green.

In physics, Green's theorem is mostly used to solve two-dimensional flow integrals, stating that the sum of fluid outflows at any point inside a volume is equal to the total outflow summed about an enclosing area. This is closely related to the Laplace equation[2] $\Delta f = 0$, which is a fundamental partial differential equation in many applications (see several references in [EK] and elsewhere).

La divergence et le théorème de Gauss.

In vector calculus, the divergence theorem, also known as Gauss' theorem, Ostrogradsky's theorem, or Gauss-Ostrogradsky theorem is a result that relates the flow (that is, flux) of a vector field through a surface to the behaviour of the vector field inside the surface.

More precisely, the divergence theorem states that the outward flux of a vector field through a surface is equal to the triple integral of the divergence on the region inside the surface. Intuitively, it states that the sum of all sources minus the sum of all sinks gives the net flow out of a region.

The divergence theorem is an important result for the mathematics of physics, in particular in electrostatics and fluid dynamics.

See also related sections in Chapter 10 of the reference [EK].

Le théorème de Stokes.

Ce résultat apparaît comme une généralisation de l'intégration d'une fonction (continue) f par variation d'une primitive (F), à savoir $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Le théoèreme de Stokes est un résultat fondamental de la géométrie différentielle et de l'analyse vectorielle. Les utilisations sont nombreuses (expression intégrale de plusieurs lois de l'électromagnétisme, ...). Les théorèmes de Gauss et de Green en sont d'ailleurs des cas particuliers.

Références: sections correspondantes du chapitre 10 de [EK], littérature classique (mathématiques et applications).

EXERCICES

1. Montrer qu'en coordonnées polaires ((r,θ) dans $\mathbb{R}^2$ et (r,θ,φ) dans $\mathbb{R}^3$), le Laplacien est décrit de la manière suivante (see [EK], chapitre 12)

$$\Delta = D_r^2 + \frac{1}{r}D_r + \frac{1}{r^2}D_\theta^2 \qquad \text{dans} \qquad \mathbb{R}^2$$

$$\Delta = D_r^2 + \frac{2}{r}D_r + \frac{1}{r^2}D_\varphi^2 + \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{r^2}D_\varphi + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}D_\theta^2 \qquad \text{dans} \qquad \mathbb{R}^3$$

[1] Le texte ci-dessous est basé sur des données de Wikipedia and al, sur le livre de référence de Kreiszig et sur des syllabi classiques de cours

[2] Dans l'espace euclidien, le Laplacien Δ est l'opérateur $D_x^2 + D^2y + D^2z$. Dans le plan, il s'agit de l'opérateur $D_x^2 + D_y^2$. Une solution (réelle) de l'équation de Laplace dans le plan est appelée *fonction harmonique*. Les fonctions harmoniques (réelles) sont étroitement reliées aux fonctions *holomorphes* (complexes). Cf suite du cours notamment.

2. Si ρ désigne la densité d'une distribution de masse dans le domaine A du plan, la masse totale est donnée par

$$M = \int\int_A \rho(x,y)dxdy,$$

le centre de gravité de la masse a pour coordonnées cartésiennes (x_g, y_g) avec

$$x_g = \frac{1}{M}\int\int_A x\ \rho(x,y)\ dxdy, \quad y_g = \frac{1}{M}\int\int_A y\ \rho(x,y)\ dxdy$$

et les moments d'inertie de la masse par rapport aux axes sont

$$I_X = \frac{1}{M}\int\int_A x^2\ \rho(x,y)\ dxdy, \quad I_Y = \frac{1}{M}\int\int_A y^2\ \rho(x,y)\ dxdy.$$

Si A est le quart du disque centré à l'origine, de rayon 1 et situé dans le premier quadrant et si ρ est identiquement 1 dans cet ensemble, déterminer les élements définis ci-dessus.

3. (EK p 438) Calculer (si possible) les intégrales suivantes. Dans chaque cas, représenter l'ensemble d'intégration.

$$\int_0^1 \left(\int_{1-x}^{1-x^2} x^2 y\ dy \right)\ dx, \quad \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\sin y} e^x \cos y\ dx \right), \quad \int\int_A xye^{x^2-y^2}$$

où A est la surface fermée bornée déterminée par le triangle de sommets $(0,0), (1,1), (1,2)$.

4. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b > 0$, calculer

$$\int_0^{+\infty} e^{-bx} \frac{\sin(ax)}{x}\ dx.$$

5. Vérifier la formule de Stokes-Ampère pour la fonction vectorielle $\vec{f} = [x^2y, 0, xyz]$ et la surface $\mathcal{S}$ composée de la portion de cylindre d'équation cartésienne $x^2 + y^2 = R^2$ limitée par les plans d'équation $z = 0$, $z = h$ et l'ensemble $\{x, y, h) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$ $(h, R > 0)$.

6. On considère le champ vectoriel $\vec{f} = [xy, -y^2]$.
(a) Pour tout naturel strictement positif n, soit la courbe $\mathcal{C}_n$ d'équation cartésienne $y = x^n$. Calculer l'intégrale curviligne du champ $\vec{f}$ le long de l'arc de $\mathcal{C}_n$ d'origine $(0,0)$ et d'extrémité $(1,1)$.

   (b) On considère le quart de circonférence centré à l'origine, de rayon 1, situé dans le premier quadrant et deux paramétrages de celui-ci:

$$\vec{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t),\ t \in [0, \pi/2]; \qquad \vec{\gamma'}(t) = (t, \sqrt{1-t^2}),\ t \in [0,1]$$

Déterminer l'intégrale curviligne de $\vec{f}$ le long de $\vec{\gamma}$ puis le long de $\vec{\gamma'}$.