ANALYSE II Liste supplémentaire numéro 2 (listes 4-8)

1. (a) Soit γ le paramétrage classique injectif (sauf extrémités) de la circonférence centrée en i , de rayon 2 et orientée "aire à gauche". En justifiant vos démarches, déterminer la valeur de l'intégrale curviligne

$$\int_{\gamma} \frac{1}{\bar{z}} dz.$$

- (b) Soit γ le paramétrage classique injectif (sauf extrémités) de la circonférence centrée en 0, de rayon 1 et orientée "aire à gauche". En justifiant vos démarches, déterminer la valeur de l'intégrale curviligne

$$\int_{\gamma} \frac{e^z - \cos z}{z^4} dz.$$

2. La proposition suivante est-elle vraie ou fausse? Pourquoi?
Si z_0 est une singularité isolée de la fonction holomorphe f et si le résidu de f en z_0 est nul, alors f se prolonge en une fonction holomorphe en z_0

3. (a) On donne

$$f(z) = \frac{z^3}{(z+i)^2(z^2+z+1)}.$$

Où cette fonction est-elle holomorphe?

Quels sont ses zéros? Quelles sont leurs multiplicités respectives?

Quelles sont ses singularités isolées? De quels types sont-elles?

Déterminer le résidu en chacune des singularités isolées, en fonction de celles-ci.

- (b) On donne

$$f(z) = \frac{z^2}{\sin^3 z}.$$

Où cette fonction est-elle holomorphe?

Quels sont ses zéros? Quelles sont leurs multiplicités respectives?

Quelles sont ses singularités isolées? De quels types sont-elles?

Déterminer le résidu en chacune des singularités isolées.

4. Déterminer le développement en série de Laurent en 0 (resp. en $-i$) pour f , en spécifiant chaque fois où la convergence a lieu.

$$f(z) = \frac{z^3}{(z+i)^2}.$$

5. Si la fonction donnée est intégrable sur $[0, +\infty[$, calculer l'intégrale suivante par "méthode de variables complexes"

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} dx$$

6. Soit un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et soit $z_0 \in \Omega$. Si f est une fonction holomorphe dans $\Omega \setminus \{z_0\}$, on sait que

(a) *La fonction f se prolonge en une fonction holomorphe en z_0 si et seulement si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \in \mathbb{C}$.*

(b) *Le complexe z_0 est une singularité essentielle pour f si et seulement si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ n'existe pas.*

(c) *Le complexe z_0 est un pôle d'ordre fini non nul pour f si et seulement si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$*

Parmi les propriétés (a), (b), (c) ci-dessus, quelles sont celles qui subsistent si, dans les limites, on remplace $f(z)$ par $(z - z_0)f(z)$? Pourquoi?