Analyse II

Quelques rappels: courbes, surfaces et intégrales apparentées

---

AVERTISSEMENT: ceci constitue un mémo "pratique" de rappels sur les notions de courbes, surfaces et intégrales apparentées. Des développements plus importants seraient indispensables pour une version complète de la théorie liée à ces notions. Ici, nous nous contentons d'une "version pratique dans $\mathbb{R}^3$"; cette présentation introduit cependant les notions rigoureuses qu'il conviendrait de développer (mais ce n'est pas le but de ce cours et nous renvoyons au cours de géométrie et à des références classiques dans ce domaine pour de plus amples informations).

Nous nous plaçons dans l'espace ($\mathbb{R}^3$); la notion de courbe ou de surface plane apparaîtra comme un cas particulier. En bref, on peut dire qu'une courbe est un ensemble de points de l'espace décrit à l'aide d'un seul paramètre réel et qu'une surface est un ensemble de points de l'espace décrit à l'aide de deux paramètres réels.

Remarque: nous renvoyons aussi aux chapitres 9 et 10 de EK, dont plusieurs sections traitent de cette matière. Cependant, il convient de faire attention aux différentes notations utilisées pour désigner la même notion mathématique.

Courbes, chemins, et intégrales associées: définitions et propriétés générales

Courbes, chemins, paramétrages.

Plus précisément, pour les courbes, cette description s'effectue à l'aide d'une fonction d'une variable réelle, à valeurs vectorielles (dans $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^2$ dans le cas des courbes planes), que l'on appelle *paramétrage, ou encore chemin* et qui est la plupart du temps définie sur un intervalle (ou une union d'intervalles)

$$\vec{\gamma}\ :\ I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \quad t \mapsto \vec{\gamma}(t) = [\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)] \qquad \text{(chemin)}$$

$$\mathcal{C} = \{P(x, y, z)\ :\ x = \gamma_1(t),\ y = \gamma_2(t),\ z = \gamma_3(t), \quad t \in I\} \qquad \text{(courbe).}$$

Bien souvent, il est sous-entendu qu'un chemin est une fonction continue; la notion de régularité est celle de la dérivabilté (y compris sur un intervalle fermé). On utilisera souvent des chemins de classe C_1 par morceaux[1].

Il est évident qu'une même courbe peut être représentée par plusieurs paramétrages. Afin de définir les notions d'orientation, de vecteur tangent unitaire, d'intégrales sur des courbes en utilisant des paramétrages, il est donc indispensable de ne travailler qu'avec une famille de paramétrages autorisant des définitions intrinsèques. Pour de nombreuses applications, il suffira de travailler avec des chemins rectifiables[2] et injectifs (sauf aux extrémités dans le cas de chemins fermés[3]). Rappelons qu'un chemin injectif est qualifié de "chemin simple" et qu'une "courbe simple" est une courbe qui admet un paramétrage par un chemin simple.

Intégration sur des courbes et chemins simples rectifiables[4]

On définit tout d'abord l'intégrale d'une fonction sur un chemin rectifiable.

Intégrale d'une fonction sur un chemin rectifiable. Soit $\vec{\gamma}\ [a, b] \mapsto \mathbb{R}^3$ un chemin de classe C_1 par morceaux[5] et soit f une fonction continue sur l'image de $\vec{\gamma}$. *L'intégrale de f sur le chemin $\vec{\gamma}$* est définie par

$$\int_{\vec{\gamma}} f ds \ :=\ \int_a^b f(\vec{\gamma}(t))\ \|D\vec{\gamma}(t)\|\ dt.$$

On démontre alors le résultat suivant.

---

[1]cela signifie que $\vec{\gamma}$ est continu sur I, que I peut s"écrire sous la forme d'une union finie d'intervalles telle que la restriction de $\vec{\gamma}$ à chacun des intervalles de cette union soit de classe C_1.

[2]Le chemin $\vec{\gamma}$ défini sur $[a, b]$ est dit rectifiable si l'ensemble $\left\{\sum_{j=1}^{J} \|\vec{\gamma}(a_j) - \vec{\gamma}(a_{j-1})\|\ :\ a_0, \ldots, a_J \text{ découpage de } [a, b]\right\}$ est borné. Dans ce cas, sa borne supérieure est appelée *longueur* de $\vec{\gamma}$ et est notée $L_{\vec{\gamma}}$. Signalons l'exemple fondamental suivant : si $\vec{\gamma}$ est de classe C_1 par morceaux, alors il est rectifiable et sa longueur est $L_{\vec{\gamma}} = \int_a^b \|D\vec{\gamma}(t)\|\ dt$.

[3]que l'on appelle aussi lacets

[5]l'intégrale dont il est question ici peut être définie "à la Riemann", ie avec des découpages et des convergences de suites, en utilisant seulement un chemin rectifiable, non nécessairement régulier

Invariance de l'intégrale sur des chemins simples rectifiables qui ont la même image. Si l'on dispose de deux paramétrages d'une même courbe simple par des chemins simples rectifiables $\vec{\gamma_1}$ et $\vec{\gamma_2}$ et si f est une fonction continue sur la courbe, alors

$$\int_{\vec{\gamma_1}} f\ ds \ = \ \int_{\vec{\gamma_2}} f\ ds.$$

On peut alors définir *l'intégrale de f sur la courbe simple rectifiable $\mathcal{C}$* comme étant l'intégrale de f sur n'importe quel chemin simple rectifiable $\vec{\gamma}$ qui paramétrise la courbe:

$$\int_{\mathcal{C}} f\ ds \ = \ \int_{\vec{\gamma}} f\ ds.$$

Dans le cas $f = 1$, il s'agit de la notion de *longueur de la courbe $\mathcal{C}$*.

Intégrales curvilignes le long de chemins rectifiables et le long de courbes rectifiables orientées

On définit tout d'abord l'intégrale curviligne d'une fonction le long d'un chemin rectifiable.

Intégrale curviligne le long d'un chemin rectifiable. Soit $\vec{\gamma}\ [a,b] \mapsto \mathbb{R}^3$ un chemin de classe C_1 par morceaux[6] et soit $\vec{f}$ une fonction continue sur l'image de $\vec{\gamma}$. *L'intégrale curviligne de $\vec{f}$ le long du chemin* $\vec{\gamma}$ est définie par

$$\int_{\vec{\gamma}} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz \ := \ \int_a^b \vec{f}(\vec{\gamma}(t)) \bullet D\vec{\gamma}(t)\ dt.$$

On définit ensuite la notion d'orientation d'une courbe. Pour cela, on utilise le résultat suivant.

Lien entre paramétrages. Soit $\vec{\gamma}(t),\ t \in [a,b]$ une représentation paramétrique simple de la courbe simple $\mathcal{C}$. Alors, pour toute représentation paramétrique simple $\vec{r}(t),\ t \in [c,d]$ de $\mathcal{C}$, il existe une fonction f, continue et strictement monotone sur $[c,d]$, d'image égale à $[a,b]$ et telle que[7] $\vec{r}(t) = \vec{\gamma}(f(t))$ pour tout $t \in [c,d]$.

Entre les paramétrages simples d'une même courbe, on peut ainsi définir une relation d'équivalence: deux paramétrages sont dits équivalents si la fonction qui permet de passer de l'un à l'autre est strictement croissante. Cette relation définit deux classes et le choix d'une des deux classes s'appelle *orienter la courbe*.

On démontre alors le résultat suivant.

Intégrale curviligne le long de chemins rectifiables qui ont la même image. Si l'on dispose de deux paramétrages d'une même courbe simple par des chemins simples rectifiables $\vec{\gamma_1}$ et $\vec{\gamma_2}$ et si $\vec{f}$ est une fonction continue sur la courbe, alors

$$\int_{\vec{\gamma_1}} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz = \pm \int_{\vec{\gamma_2}} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$$

le signe $+$ correspondant au cas où les paramétrages font partie de la même orientation et le signe $-$ au cas où leurs orientations sont différentes.

On peut alors définir *l'intégrale curviligne de f le long de la courbe simple rectifiable orientée $\mathcal{C}^+$* comme étant l'intégrale de f sur n'importe quel chemin simple rectifiable $\vec{\gamma}$ qui paramétrise la courbe et qui appartient à l'orientation choisie:

$$\int_{\mathcal{C}^+} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz = \ \int_{\vec{\gamma}} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz.$$

Vecteurs tangents en un point d'une courbe; vecteur tangent unitaire en un point d'une courbe orientée

Si l'on dispose d'un paramétrage $\vec{\gamma}$ de la courbe $\mathcal{C}$, régulier au sens de la dérivabilité et de la non annulation de la dérivée (en aucun point), le vecteur $D\vec{\gamma}(t)$ est appelé *vecteur tangent* à la courbe au point P paramétré par t; si l'on change de paramétrage, les vecteurs tangents obtenus ainsi ne sont pas le mêmes en général, mais ils sont multiples l'un de l'autre.

[6]l'intégrale dont il est question ici peut être définie "à la Riemann", ie avec des découpages et des convergences de suites, en utilisant seulement un chemin rectifiable, non nécessairement régulier

[7]cette relation caractérise en fait f

Si l'on considère à présent une courbe orientée (et régulière), tous les vecteurs obtenus par le processus précédent, divisés par leur norme, sont tous égaux (et changer d'orientation donne simplement le vecteur opposé). On définit ainsi le vecteur tangent unitaire au point P_0 de la courbe orientée $\mathcal{C}^+$:

$$\vec{t}(P_0) = \frac{D\vec{\gamma}(t_0)}{\|D\vec{\gamma}(t_0)\|}, \quad \vec{OP} = \vec{\gamma}(t_0)$$

quel que soit le paramétrage $\vec{\gamma}$ de la courbe pour autant qu'il appartienne à l'orientation choisie.

Remarquer que si la courbe $\mathcal{C}$ est plane (disons incluse dans le plan X, Y) et si $F(x, y) = 0$ en est une équation cartésienne, alors un vecteur tangent $\vec{v}_0$ à cette courbe au point $P_0(x_0, y_0)$ a pour composantes

$$[D_y F(x_0, y_0), -D_x F(x_0, y_0)]\,.$$

Rappelons aussi que $\mathrm{grad} F(x_0, y_0) \bullet \vec{v}_0 = 0$. Si la courbe est le graphique d'une fonction f, on définit $F(x, y) = y - f(x)$ et on retrouve bien $[1, Df(x_0)]$ commme composantes d'un vecteur tangent.

Surfaces, couvertures, et intégrales associées: définitions et propriétés générales

Paramétrages, couvertures de surfaces[8] .

Dans le contexte du cours, nous n'utiliserons les surfaces que dans un cadre très pratique. Nous nous contenterons des définitions et propriétés pratiques suivantes, lesquelles sont rigoureuses d'un point de vue mathématique mais ne rencontrent certes pas une étude plus vaste de la théorie des surfaces[9].

Nous nous plaçons d'emblée dans un contexte qui va autoriser la définition d'intégrales intrinsèques.

Par définition, une *couverture* est la donnée d'un compact[10] K de $\mathbb{R}^2$, d'une fonction vectorielle $\vec{\varphi}$ de classe C_1 dans un ouvert contenant K, à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, vérifiant les propriétés suivantes
- l'application $\vec{\varphi}$ est injective sur l'intérieur de K
- et il existe une fonction vectorielle $\vec{\psi}$ de classe C_1 dans un ouvert de $\mathbb{R}^3$ contenant l'image par $\vec{\varphi}$ de l'intérieur de K telle que[11] $\vec{\psi}\big(\varphi_1(t, s), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v)\big) = [u, v]$ pour tous (u, v) appartenant à l'intérieur de K.

On appelle *surface* (ou portion régulière de surface), une partie $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^3$ pour laquelle il existe une couverture dont l'image est $\mathcal{S}$.

Intégration d'une fonction sur une surface (cf aussi EK p. 454)

On démontre le résultat suivant.

Invariance de l'intégrale sur des couvertures qui ont la même image. Si l'on dispose de deux couvertures $(\vec{\varphi}^1, K_1)$ et $(\vec{\varphi}^2, K_2)$ d'une même surface $\mathcal{S}$ et si f est une fonction continue sur $\mathcal{S}$, alors

$$\int_{K_1} f(\vec{\varphi}^1(u, v)) \; \left\|D_u\vec{\varphi}^1 \wedge D_v\vec{\varphi}^1\right\| \; du\; dv \;=\; \int_{K_2} f(\vec{\varphi}^2(u, v)) \left\|D_u\vec{\varphi}^2 \wedge D_v\vec{\varphi}^2\right\| \; du\; dv.$$

On peut alors définir *l'intégrale d'une fonction $f \in C_0(\mathcal{S})$ sur la surface $\mathcal{S}$*, notée $\int\int_{\mathcal{S}} f\; d\sigma$ par

$$\int\int_{\mathcal{S}} f\; d\sigma \;=\; \int\int_K f(\vec{\varphi}(u, v)) \; \|D_u\vec{\varphi} \wedge D_v\vec{\varphi}\| \; du\; dv$$

quelle que soit la couverture $(\vec{\varphi}, K)$ choisie pour paramétrer $\mathcal{S}$.

Dans le cas où la fonction vaut 1, on retrouve la notion *d'aire d'une surface.*

En particulier, dans le cas d'une surface plane (disons incluse dans le plan X, Y) de couverture donnée par $(\vec{\varphi} = [\varphi_1, \varphi_2, 0], K)$, la forme particulière de la formule ci-dessus est

$$\text{Aire de } \mathcal{S} \;=\; \int\int_{\mathcal{S}} d\sigma = \int\int_K |D_u\varphi_1\; D_v\varphi_2 \;-\; D_u\varphi_2\; D_v\varphi_1|\, du\; dv.$$

[8]Une couverture est une représentation paramétrique avec certaines propriétés, lesquelles vont être définies
[9]C'était aussi le cas dans la présentation que nous avons faite pour les courbes.
[10]on supposera que l'intérieur de K est non vide
[11]Cela signifie que l'on doit pouvoir inverser $\vec{\varphi}$ de façon régulière

Surfaces orientables, vecteurs normaux

Les conditions imposées dans la définition d'une couverture impliquent que la fonction

$$(u,v) \mapsto \vec{N}(u,v) := D_u\vec{\varphi} \wedge D_v\vec{\varphi}$$

soit non nulle en tout point de l'intérieur de K. En fait, une première généralisation de la définition d'une surface consisterait à travailler localement (dans ce contexte, on dit aussi "par domaines de cartes"), c'est-à-dire à demander que tout point de $\mathcal{S}$ admet un voisinage dans lequel il est possible de paramétrer (localement) la surface par une couverture. Dans ces conditions, on ramène les hypothèses à l'indépendance linéaire des vecteurs $D_u\vec{\varphi}$ et $D_v\vec{\varphi}$ quels que soient (u,v) dans le voisinage correspondant. Pour tout (u,v), le vecteur $\vec{N}(u,v)$ est orthogonal au plan tangent à la surface au point paramétré par (u,v); on peut donc définir une normale unitaire continue

$$\vec{n}(u,v) = \frac{\vec{N}(u,v)}{\|\vec{N}(u,v)\|}$$

en tout point de l'image par $\vec{\varphi}$ de l'intérieur de K. *On dit que l'on peut orienter* cette partie de la surface (ie celle qui correspond à l'image par φ de l'intérieur de K).

Sans entrer dans les détails (qui nécessiteraient des développements techniques qui ne sont pas le but de ce rappel), disons que l'on établit un résultat analogue à celui des paramétrages de courbes par des chemins simples: quand on dispose de deux couvertures d'une même surface[12], on montre qu'il y a toujours un changement de variables entre les deux. On répartit alors les couvertures en deux classes, selon le signe du déterminant jacobien du changement de variables qui permet de passer de l'une à l'autre. *Orienter la surface consiste alors à choisir l'une des deux classes.* On écrit alors $\mathcal{S}^+$ pour signifier que l'on a orienté la surface. Quand on définit un vecteur normal unitaire à l'aide d'une couverture, un changement de couverture de la même orientation ne change pas le vecteur normal unitaire; par contre, une couverture de l'autre orientation donne l'opposé du vecteur en guise de vecteur normal unitaire.

Rappelons également que si une surface est donnée par une équation cartésienne $f(x,y,z) = 0$, alors le vecteur $\mathrm{grad} f(x,y,z)$ est normal à la surface au point de coordonnées (x,y,z) (pour autant qu'il ne soit pas nul).

Intégrales superficielles (sur des surfaces orientées) (cf EK p. 449)

Il s'agit d'intégrales du type

$$\begin{aligned}
\int\int_{\mathcal{S}^+} f dx \wedge dy &= \int\int_K f(\vec{\varphi}(u,v)) N_3(u,v) du dv \\
\int\int_{\mathcal{S}^+} f dx \wedge dz &= \int\int_K f(\vec{\varphi}(u,v)) N_2(u,v) du dv \\
\int\int_{\mathcal{S}^+} f dy \wedge dz &= \int\int_K f(\vec{\varphi}(u,v)) N_1(u,v) du dv
\end{aligned}$$

où N_1, N_2, N_3 sont les composantes du vecteur normal à la surface orientée $\mathcal{S}$ déterminé par la couverture $\vec{\varphi}(u,v),\ (u,v) \in K$, à savoir $\vec{N}(u,v) = D_u\vec{\varphi}(u,v) \wedge D_u\vec{\varphi}(u,v)$.

Le lien entre intégrale superficielle sur une surface orientée et intégrale sur une surface est

$$\int\int_K f(\vec{\varphi}(u,v)) N_3(u,v) du dv = \int\int_{\mathcal{S}} f n_3 d\sigma = \int\int_{\mathcal{S}^+} f dx \wedge dy$$

où n_3 est la troisième composante du vecteur normal unitaire défini selon l'orientation de la surface (et analogue pour les autres cas). En particulier, si $\vec{f} = [f_1, f_2, f_3]$, on a

$$\int\int_K \vec{f}(\vec{\varphi}(u,v)) \bullet \vec{N}(u,v) du dv = \int\int_{\mathcal{S}} \vec{f} \bullet \vec{n} d\sigma$$

Orientations relatives des courbes, surfaces.

Dans les formules intégrales qui vont suivre, il sera important de relier l'orientation des courbes bordant des surfaces, ainsi que de bien définir l'orientation des surfaces bordant des corps. Dans ce

[12] c'est ici qu'il faudrait prendre soin de préciser s'il s'agit de notion locale ou globale que l'on considère

contexte, on peut introduire de manière tout à fait rigoureuse (ie sans faire appel uniquement à un dessin) la notion de “normale extérieure”. Cependant, vu la complexité technique des développements et vu l’utilisation “pratique” que nous visons, nous nous contenterons de définitions géométriques (mais ces définitions restent indispensbles pour l’exactitude des formules!).