ANALYSE II, 2007-2008, 2e bachelier ingénieur civil
Examen du 22 janvier 2008 — Solutions
Version: January 22, 2008(V1: 10-01-08)

THEORIE

Question 1
1.1) Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Enoncer ce que l'on appelle "formule de représentation intégrale de Cauchy pour f et ses dérivées". Les hypothèses de validité et les notations employées doivent être clairement exprimées.
1.2) Enoncer et démontrer le théorème de Liouville.
Solution. Voir cours.

Question 2
Enoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans un espace de Hilbert H puis, en guise d'application, l'énoncer dans l'espace $H = L^2([0,+\infty[)$ (en précisant la signification des notations employées).
Solution. Voir solution de l'examen de janvier 2007 (question numéro 3 de la théorie).

EXERCICES

Question 1 **Dans les réponses aux questions ci-dessous, expliquer et justifier chaque fois les démarches.**

1.1) **Soit $\mathcal{E}$ l'arc de l'ellipse d'équation cartésienne $4x^2 + y^2 = 4$ situé dans le premier quadrant.**
a) Montrer que la courbe $\mathcal{E}$ et la boucle de rosace d'équation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{l} x = \sin(2t)\ \cos t \\ y = \sin(2t)\ \sin t \end{array}\right. ,\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

ont la même longueur. Esquisser ces courbes dans un même repère orthonormé.
b) En précisant (si nécessaire) l'orientation, calculer les intégrales suivantes

$$\int_{\mathcal{E}} x dx, \quad \int_{\mathcal{E}} x dy, \quad \int_{\mathcal{E}} xy ds$$

1.2) Calculer l'intégrale suivante (intégrale sur une surface)

$$\int\int_{\mathcal{S}} rot(\vec{f}) \bullet \vec{n}\ d\sigma$$

pour la fonction vectorielle $\vec{f}$ donnée par $\vec{f}(x,y,z) = [-x^2y, xy^2, z^2]$ et la surface $\mathcal{S}$ constituée par les points du paraboloïde d'équation cartésienne $x^2+y^2 = z$ dont la troisième coordonnée est inférieure ou égale à 2.

Solution. 1.1) a) D'une part, une représentation paramétrique injective et régulière de l'arc d'ellipse est

$$\left\{\begin{array}{l} x = \gamma_1(t) = \cos t \\ y = \gamma_2(t) = 2\sin t \end{array}\right. \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

La longueur de cet arc est égale à

$$L_{\mathcal{E}} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\Big(D\gamma_1(t)\Big)^2 + \Big(D\gamma_2(t)\Big)^2} dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^2 t + 4\cos^2 t} dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + 3\cos^2 t}\ dt$$

D'autre part, la longueur de la boucle de rosace $\mathcal{R}$ est égale à

$$L_{\mathcal{R}} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\Big(D\Gamma_1(t)\Big)^2 + \Big(D\Gamma_2(t)\Big)^2} dt$$

avec $\Gamma_1(t) = \sin(2t)\cos t,\ \Gamma_2(t) = \sin(2t)\sin t$. Comme on a

$$D\Gamma_1(t) = 2\cos(2t)\cos t - \sin(2t)\sin t, \quad D\Gamma_2(t) = 2\cos(2t)\sin t + \sin(2t)\cos t$$

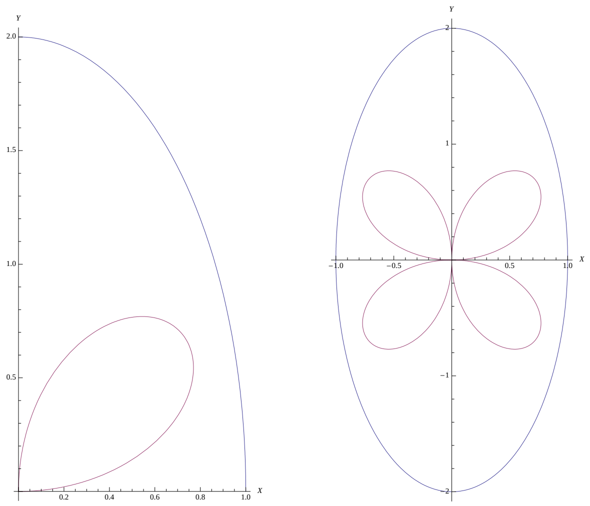
on obtient

$$\Big(D\Gamma_1(t)\Big)^2 + \Big(D\Gamma_2(t)\Big)^2 = 4\cos^2(2t) + \sin^2(2t) = 1 + 3\cos^2(2t).$$

Dès lors

$$\begin{aligned}
L_{\mathcal{R}} &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1+3\cos^2(2t)}\ dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sqrt{1+3\cos^2 u}\ du \quad \text{(chgt de var. } 2t = u) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+3\cos^2 u}\ du + \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{1+3\cos^2 u}\ du \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+3\cos^2 u}\ du + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+3\cos^2 v}\ dv \quad \text{(chgt de var. } v = \pi - u) \\
&= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1+3\cos^2 u}\ du \\
&= L_{\mathcal{E}}
\end{aligned}$$

La figure de gauche représente les courbes dont il est question ci-dessus. A titre d'information, la figure de droite représente l'ellipse complète et la rosace complète ($t \in [0, 2\pi]$).



b) L'orientation doit être précisée pour les deux premières intégrales. On considère l'orientation "trigonométrique". On a successivement

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{E}} x\ dx &= \int_0^{\pi/2} \cos t\ (-\sin t)\ dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} D\cos^2 t\ dt = -\frac{1}{2} \\
\int_{\mathcal{E}} x\ dy &= \int_0^{\pi/2} \cos t\ (2\cos t)\ dt = \int_0^{\pi/2} (1+\cos(2t))\ dt = \frac{\pi}{2} \\
\int_{\mathcal{E}} xy\ ds &= \int_0^{\pi/2} 2\cos t\ \sin t\ \sqrt{1+3\cos^2 t}\ dt = -\frac{2}{9}\left[(1+3\cos^2 t)^{3/2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{14}{9}
\end{aligned}$$

1.2) On choisit de désigner par $\vec{n}$ la normale unitaire "extérieure" à la surface.
Le rotationnel de $\vec{f}$ est donné par

$$rot\vec{f}(x,y,z) = [0, 0, x^2+y^2]$$

En utilisant le paramétrage classique[2]

$$\vec{\varphi}(z,t) = [\sqrt{z}\cos t, \sqrt{z}\sin t, z],\ z \in [0,2],\ t \in [0,2\pi]$$

de la surface donnée, on a

$$D_z\vec{\varphi}(z,t) \wedge D_t\vec{\varphi}(z,t) = [-\sqrt{z}\cos t, \sqrt{z}\sin t, \frac{1}{2}]$$

$$\vec{n}(z,t) = \frac{[\sqrt{z}\cos t, -\sqrt{z}\sin t, -\frac{1}{2}]}{\|D_z\vec{\varphi}(z,t) \wedge D_t\vec{\varphi}(z,t)\|}$$

et les composantes du rotationnel sont $[0,0,z]$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\int\int_S rot(\vec{f}) \bullet \vec{n}\ d\sigma &= \int\int_{[0,2]\times[0,2\pi]} \frac{-z}{2\|D_z\vec{\varphi}(z,t) \wedge D_t\vec{\varphi}(z,t)\|}\ \|D_z\vec{\varphi}(z,t) \wedge D_t\vec{\varphi}(z,t)\|\ dt\ dz \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dt\ \int_0^2 z\ dz \\ &= -2\pi\end{aligned}$$

Le calcul de cette intégrale peut aussi s'effectuer en utilisant le théorème de Stokes.

Question 2 Dans les réponses aux questions ci-dessous, expliquer et justifier chaque fois les démarches.

2.1) On donne la fonction f par

$$f(z) = \frac{z^2}{1+z^2}\ e^{\frac{1}{z}}$$

a) Où cette fonction est-elle holomorphe?
b) Quels sont ses zéros? Quelles en sont les multiplicités respectives?
c) Quelles sont ses singularités isolées? De quels types sont-elles?
d) Déterminer le résidu en chacune des singularités isolées.

2.2) Soit γ le paramétrage classique injectif (sauf aux extrémités) de la circonférence centrée en i, de rayon 1 et orientée dans le sens trigonométrique. Déterminer la valeur des intégrales suivantes

$$\int_\gamma z dz, \quad \int_\gamma \overline{z} dz, \quad \int_\gamma |z|^2 dz, \quad \int_\gamma \frac{1}{z-i} dz, \quad \int_\gamma \frac{1}{(z-i)^2} dz$$

2.3) Déterminer la valeur de l'intégrale suivante par "méthode de variables complexes"

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\ dx$$

Solution. 2.1) a) La fonction est holomorphe dans l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \{-i, i, 0\}$.
b)Vu son expression explicite, elle n'a aucun zéro dans cet ouvert.
c) Les singularités isolées sont $0, i$ et $-i$.
Le complexe 0 est singularité essentielle car la limite de f en 0 n'existe pas:

$$\lim_{m\to+\infty} f\left(\frac{1}{m}\right) = +\infty, \quad \lim_{m\to+\infty} f\left(\frac{i}{m}\right) = 0$$

(On peut également justifier cela en utilisant le développement de Laurent et le fait que 0 est singularité essentielle pour $z \mapsto e^{1/z}$.)
Le complexe i est un pôle d'ordre 1 car (par exemple)

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-i)(z+i)} e^{\frac{1}{z}} = \frac{g(z)}{z-i}$$

[2]On peut tout aussi bien utiliser $[z\cos t, z\sin t, z^2],\ z \in [0,\sqrt{2}],\ t \in [0,2\pi]$

au voisinage de i (exclus) avec g holomorphe au voisinage de i (inclus) et non nul en i.
Le complexe $-i$ est un pôle d'ordre 1 car (par exemple)

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-i)(z+i)} e^{\frac{1}{z}} = \frac{G(z)}{z+i}$$

au voisinage de $-i$ (exclus) avec G holomorphe au voisinage de $-i$ (inclus) et non nul en $-i$.

d) Les résidus en i et $-i$ sont donnés immédiatement par

$$Res_i f = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i} \frac{z^2}{z+i} e^{\frac{1}{z}} = \frac{i}{2}e^{-i}, \quad Res_{-i} f = \lim_{z\to -i}(z+i)f(z) = \lim_{z\to -i} \frac{z^2}{z-i} e^{\frac{1}{z}} = -\frac{i}{2}e^{i}$$

Le résidu en 0 s'obtient[3] soit en calculant directement l'intégrale $\int_\gamma f(z)dz$ avec γ désignant une circonférence de rayon strictement inférieur à 1 et centrée à l'origine, soit en recherchant le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans le développement de Laurent de f.

Ainsi, si $\gamma(t) = re^{it},\ t \in [0, 2\pi]$ (avec $r \in]0,1[$), on a

$$\begin{aligned}
Res_0 f = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\ dz &= \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r^2e^{2it}}{1+r^2e^{2it}} e^{\frac{e^{-it}}{r}}\ ire^{it}\ dt \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r^2e^{-2it}}{1+r^2e^{-2it}} e^{\frac{e^{it}}{r}}\ ire^{-it}\ dt \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\frac{e^{2it}}{r^2}+1} e^{\frac{e^{it}}{r}}\ ire^{-it}\ dt \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{-2it}}{\frac{e^{2it}}{r^2}+1} e^{\frac{e^{it}}{r}}\ ire^{it}\ dt \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r^2e^{-2it}}{\frac{e^{2it}}{r^2}+1} e^{\frac{e^{it}}{r}}\ i\frac{e^{it}}{r}\ dt \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma F(z)\ dz
\end{aligned}$$

avec

$$F(z) = \frac{e^z}{z^2(z^2+1)}, \quad \Gamma(t) = \frac{e^{it}}{r},\ t \in [0, 2\pi].$$

Les singularités isolées de F sont encore $0, i, -i$ et ce sont des pôles (respectivement d'ordre $2, 1, 1$); le théorème des résidus donne alors directement

$$Res_0 f = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma F(z)\ dz = Res_0 F\ +\ Res_i F\ +\ Res_{-i} F = 1 - \frac{1}{2i}e^i + \frac{1}{2i}e^{-i} = 1 - \sin 1$$

Le calcul de ce résidu par utilisation directe du développement de Laurent de $z \mapsto e^{1/z}$ peut s'effectuer comme suit. On part des développements connus de $z \mapsto \frac{z^2}{1+z^2} = 1 - \frac{1}{1+z^2}$ (série géométrique) et de l'exponentielle:

$$f(z) = \frac{z^2}{1+z^2}e^{\frac{1}{z}} = -\sum_{m=1}^{+\infty}(-1)^m z^{2m}\ \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{z^k k!}$$

et on cherche le coefficient a_{-1} de $\frac{1}{z}$ dans cette expression. Etant donné m, le seul terme (en k) de la seconde série donnant $\frac{1}{z}$ (après multiplication) correspond à $k = 2m+1$. Il s'ensuit que

$$a_{-1} = -\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!} = 1 - \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!} = 1 - \sin 1.$$

2.2) La première intégrale est nulle car il s'agit de l'intégrale d'une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$ sur un chemin homotope à un chemin constant.

[3]Cet exercice a été résolu au cours d'une répétition.

Les deuxième et troisième intégrales se calculent directement, en appliquant la définition des intégrales curvilignes et en tenant compte de l'expression du chemin $\gamma(t) = i + e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$:

$$\int_\gamma \overline{z} dz = \int_0^{2\pi} (-i + e^{-it})\ ie^{it}\ dt = \int_0^{2\pi} idt = 2i\pi$$

et

$$\begin{aligned}
\int_\gamma |z|^2 dz = \int_\gamma z\overline{z} dz &= \int_0^{2\pi} (i + e^{it})\ (-i + e^{-it})\ ie^{it}\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} (2 - ie^{it} + ie^{-it}) ie^{it}\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} (2ie^{it} + e^{2it} - 1)\ dt \\
&= -\int_0^{2\pi} dt = -2\pi
\end{aligned}$$

Les deux dernières intégrales se calculent directement en utilisant $\gamma(t) = i + e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$; on peut aussi invoquer la formule de représentation de Cauchy (pour $f(z) = 1$). On a

$$\int_\gamma \frac{1}{z - i} dz = 2i\pi, \quad \int_\gamma \frac{1}{(z - i)^2} dz = 0$$

2.3) Cet exercice a été résolu au cours. Voir aussi la correction de l'examen de janvier 2006 (Question 2, item 3).

Question 3. Dans les réponses aux questions ci-dessous, expliquer et justifier chaque fois les démarches (calculs).

3.1) Déterminer la transformée de Fourier (−) de la fonction suivante

$$f(x) = e^{-2\pi|x|},\ x \in \mathbb{R}.$$

3.2) En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{4\pi^2 + x^2} dx$$

Solution. 3.1) La fonction donnée est intégrable dans $\mathbb{R}$ car elle est continue et $\lim_{x\to\infty} x^2 f(x) = 0$. Cela étant, comme la fonction est paire, on obtient directement, quel que soit $y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_y^- f = \int_\mathbb{R} e^{-ixy} f(x)\ dx &= 2\int_0^{+\infty} \cos(xy) e^{-2\pi x} dx \\
&= 2\Re \int_0^{+\infty} e^{-ixy} e^{-2\pi x} dx \\
&= 2\Re \frac{1}{iy + 2\pi} = 2\Re \frac{2\pi - iy}{y^2 + 4\pi^2} \\
&= \frac{4\pi}{y^2 + 4\pi^2}.
\end{aligned}$$

3.2) Cela étant, on a directement

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{4\pi^2 + x^2} dx = \frac{1}{2}\int_\mathbb{R} \frac{e^{ix}}{4\pi^2 + x^2} dx = \frac{1}{8\pi} \mathcal{F}_1^+ \mathcal{F}^- f = \frac{1}{4} f(1) = \frac{e^{-2\pi}}{4}.$$

Question 4. **Répondre par vrai ou faux et justifier la réponse.**

a) **Si 0 est singularité essentielle de f, fonction holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, alors 0 est aussi singularité essentielle de F, défini par $F(z) = f(\frac{1}{z})$**
Faux. Voir réponse à la Question 2, item 4, janvier 2007

b) **Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ tel que $0 \in \Omega$. Si 0 est singularité essentielle de f, holomorphe dans $\Omega \setminus \{0\}$ n'ayant pas de zéro, alors 0 est aussi singularité essentielle de $1/f$**
C'est vrai: comme f ne s'annule pas dans $\Omega \setminus \{0\}$, la fonction $1/f$ est aussi holomorphe dans $\Omega \setminus \{0\}$ et 0 est encore singularité isolée de cette fonction; de plus, comme la limite de f en 0 n'existe pas, celle de $1/f$ non plus. D'où la conclusion.
On peut également justifier en disant que si 0 est un pôle de $1/f$, alors il existe un entier p et une fonction holomorphe g dans Ω, non nulle en 0 tels que $\frac{1}{f(z)} = z^p g(z)$ au voisinage de 0. Dès lors $f(z) = \frac{1/g(z)}{z^p}$ au voisinage de 0, avec $1/g$ holomorphe au voisinage de 0 et ne s'annulant pas en 0; il s'ensuit que 0 est un pôle pour f, ce qui est contradictoire.

c) **La fonction $z \mapsto \sin z$ est bornée dans $\mathbb{C}$.**
Faux: si cette fonction (holomorphe dans $\mathbb{C}$) était bornée, elle serait constante (Liouville).

d) **Il existe une fonction intégrable f telle que $\mathcal{F}_y^- f = \frac{y^2}{1+y^2},\ y \in \mathbb{R}$**
Faux car la limite en l'infini de la transformée de Fourier d'une fonction intégrable est nulle.

e) **Soit $\vec{f} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^3$ de classe C_1 (Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^3$). Si $rot\vec{f} = \vec{0}$ dans Ω, alors $\oint_{\mathcal{C}} \vec{f} \bullet \vec{t}\ ds = 0$ pour toute courbe fermée $\mathcal{C}$ régulière à valeurs dans Ω.**
C'est faux: prendre par exemple $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z)\ :\ z \in \mathbb{R}\}$, $\vec{f} = [-y/(x^2+y^2), x/(x^2+y^2), 0]$, $\mathcal{C}$=circonférence centrée à l'origine et de rayon 1 (orientée dans le sens trigonométrique). On a $rot\vec{f} = \vec{0}$ et $\oint_{\mathcal{C}} \vec{f} \bullet \vec{t}\ ds = 2\pi$.

Voir aussi toutes les discussions au sujet des égalités de ce type selon que l'ouvert est étoilé ou non.

f) **Soit $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ de classe C_1 (Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^3$). On a $\oint_{\mathcal{C}} grad(f) \bullet \vec{t}\ ds = 0$ pour toute courbe fermée $\mathcal{C}$ régulière à valeurs dans Ω.**
C'est vrai car si $\vec{\gamma}(t) = [\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)],\ t \in [a,b]$ désigne un paramétrage régulier de la courbe fermée, on a $\int_{\mathcal{C}} grad(f) \bullet \vec{t}\ ds = \int_a^b D_t(f(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))\ dt = f(\vec{\gamma}(b)) - f(\vec{\gamma}(a)) = 0$.

Voir aussi propriété vue au cours.