ANALYSE II, 2007-2008, 2e bachelier ingénieur civil
Examen du 18 août 2008 — Solutions
Version: August 13, 2008(V1: 09-08-08)

THEORIE

Question 1

1.1) Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Enoncer et démontrer ce que l'on appelle "formule de représentation intégrale de Cauchy pour f et ses dérivées". Les hypothèses de validité et les notations employées doivent être clairement exprimées.
1.2) Enoncer le résultat donnant le développement en série de puissances d'une fonction holomorphe dans un ouvert (développement de Taylor). Les hypothèses de validité et les notations employées doivent être clairement exprimées.

Solution. 1.1): voir l'examen de janvier 2007; 1.2): voir cours.

Question 2

Enoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans un espace de Hilbert H puis, en guise d'application, l'énoncer dans l'espace $H = L^2([0,1])$ (en précisant la signification des notations employées).

Solution. Voir l'examen de janvier 2007.

EXERCICES

Question 1

1.1) Déterminer un vecteur normal à la courbe plane d'équation cartésienne $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ au point de coordonnées $(1/2, \sqrt{3})$. Donner une représentation de la courbe et du vecteur.

1.2) Dans un repère orthonormé du plan, on donne la courbe plane $\mathcal{C}$ par l'intermédiaire du paramétrage $(t - \sin t, 1 - \cos t),\ t \in [0, 2\pi]$.
a) Esquisser la courbe.
b) Déterminer un vecteur tangent unitaire et un vecteur normal unitaire au point de paramètre $t = \frac{\pi}{2}$ et au point de paramètre $t = 2\pi$. Représenter ces vecteurs sur le graphique esquissé au premier item.
c) Déterminer la longueur de $\mathcal{C}$.
d) Déterminer l'aire de la surface déterminée par $\mathcal{C}$ et l'axe X.
e) Déterminer la valeur de l'intégrale $\int_{\mathcal{C}} x dy$ en spécifiant si nécessaire l'orientation donnée à la courbe.

Solution. 1.1): voir liste d'exercices numéro 3, 2007-2008.

1.2) a), b), c), d): voir liste d'exercices numéro 3, 2007-2008.

1.2) e) L'intégrale à calculer est une intégrale curviligne donc dépend de l'orientation de la courbe. Choisissons l'orientation donnée par le paramétrage ("aire à droite" dans ce cas). On a donc, par définition des intégrales curvilignes

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} x\ dy &= \int_0^{2\pi} (t - \sin t)\ D_t(1 - \cos t)\ dt = \int_0^{2\pi} (t - \sin t)\ \sin t\ dt \\
&= -\int_0^{2\pi} t D_t \cos t\ dt - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t)\ dt \\
&= -2\pi\ +\ \int_0^{2\pi} \cos t\ dt\ -\ \pi\ +\ \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos 2t\ dt \\
&= -3\pi
\end{aligned}$$

Question 2 Dans les réponses aux questions ci-dessous, expliquer et justifier chaque fois les démarches.

2.1) On donne la fonction f par

$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^3}$$

a) Où cette fonction est-elle holomorphe?
b) Quels sont ses zéros? Quelles en sont les multiplicités respectives?
c) Quelles sont ses singularités isolées? De quels types sont-elles?
d) Déterminer le résidu en chacune des singularités isolées.
e) Déterminer le développement de Laurent en chacune des singularités isolées.

2.2) Soit γ le paramétrage classique injectif (sauf aux extrémités) de la circonférence centrée en i, de rayon 1 et orientée dans le sens trigonométrique. Déterminer la valeur des intégrales suivantes

$$\int_\gamma z dz, \quad \int_\gamma \overline{z} dz, \quad \int_\gamma |z|^2 dz, \quad \int_\gamma \frac{1}{z-i} dz, \quad \int_\gamma \frac{1}{(z-i)^2} dz$$

2.3) Déterminer la valeur de l'intégrale suivante par "méthode de variables complexes"

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{16+x^4}\ dx$$

Solution. 2.1) a) Vu son expression (quotient de deux fonctions holomorphes dans le plan complexe), cette fonction est holomorphe dans le complémentaire des zéros du dénominateur, à savoir dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

b) Les zéros sont les complexes non nuls qui annulent le numérateur, à savoir $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$). Chacun de ces zéros est un zéro double du numérateur (car $D(1-\cos z) = \sin z$ est nul en ces points et $D^2(1-\cos z) = \cos z$ est non nul) donc est un zéro double de f.

c) La seule singularité isolée est 0; il s'agit d'un pôle d'ordre 1 car $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + z^4 F(z)$ avec F holomorphe dans $\mathbb{C}$ (explicitement $F(z) = \sum_{m=2}^{+\infty} (-1)^m \frac{z^{2(m-2)}}{(2m)!}$) donc

$$f(z) = \frac{1-\cos z}{z^3} = \frac{1}{2z} - zF(z).(*)$$

d) On obtient directement le résidu à partir de (*)

$$Res_0 f = \lim_{z\to 0} zf(z) = \lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{2} - z^2F(z)\right) = \frac{1}{2}.$$

e) L'expression (*) donne immédiatement $h(z) = -zF(z)$, $H(z) = 2z$ (en utilisant les notations habituelles du développement de Laurent).

2.2) Voir l'examen de janvier 2008.

2.3) Voir l'examen de janvier 2008, sauf pour le "16" du dénominateur. La réponse est

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{32}$$

(un huitième de la valeur de l'intégrale demandée en janvier, ce qu'on obtient aussi directement par un petit changement de variables).

<u>Question 3</u>

3.1) On considère l'espace de Hilbert $L^2([0, 2\pi])$ et on a le développement suivant dans cet espace:

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{m=1}^{+\infty} a_m \sin(mx).$$

En prenant le produit scalaire de chacun des deux membres de l'égalité avec la fonction $x \mapsto \sin x$, déterminer la valeur de a_1.

3.2) a) Déterminer la transformée de Fourier $(-)$ de la fonction suivante

$$f(x) = e^{-2\pi|x|},\ \ x \in \mathbb{R}$$

b) En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{4\pi^2 + x^2} dx$$

Solution. 3.1) Quel que soit le naturel m strictement supérieur à 1, on a $< \sin(.), \sin(m.) >= 0$ donc

$$\int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin x \, dx = \sum_{m=1}^{+\infty} a_m < \sin(.), \sin(m.) >= a_1 < \sin(.), \sin(.) >= a_1 \int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx.$$

Comme

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(2x)) \, dx = \pi$$

et

$$\int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin x \, dx = \left[-\frac{\pi - x}{2} \cos x \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \cos x \, dx = \pi$$

on en déduit que

$$a_1 = 1.$$

3.2) Voir l'examen de janvier 2008.

Question 4 Répondre par vrai ou faux et justifier la réponse.

a) Si 0 est un pôle d'ordre deux de f, fonction holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, alors 0 est singularité essentielle de F, défini par $F(z) = f(\frac{1}{z})$.

b) La fonction $z \mapsto \exp(-|z|)$ est bornée dans $\mathbb{C}$.

c) Il existe une fonction intégrable f telle que $\mathcal{F}_y^- f = \frac{y^2}{1+y^2}, \ y \in \mathbb{R}$.

d) L'aire sous la courbe qui représente la fonction $x \in]0, +\infty[\ \mapsto \frac{|\sin x|}{x}$ est finie

Solution. a) C'est faux comme le montre l'exemple de $f(z) = \frac{1}{z^2}$; on a $F(z) = z^2$ et F est holomorphe dans $\mathbb{C}$.

b) C'est vrai car $-|z|$ est un réel négatif quel que soit le complexe z; ainsi $0 < \exp(-|z|) \leq 1$ quel que soit le complexe z.

c) C'est faux car la transformée de Fourier d'une fonction intégrable a une limite nulle en l'infini, ce qui n'est pas le cas de $y \mapsto \frac{y^2}{1+y^2}$.

d) C'est faux puisque cette fonction n'est pas intégrable en $+\infty$.