

ANALYSE II Liste des exercices proposés pour le TD du 7 décembre 2007

1. On considère le parabolöide elliptique d'équation cartésienne $z + x^2 + y^2 = 1$ et la fonction vectorielle $\vec{f}(x, y, z) = [y, z, x]$. Vérifier la formule de Stokes pour $\vec{f}$ et la surface $\mathcal{S}$ constituée des points du parabolöide dont la troisième coordonnée est positive.
2. Dans l'espace, soit $\mathcal{C}$ le cercle centré à l'origine, passant par $A(1, 1, 1)$ et situé dans le plan déterminé par A et l'axe Z . On désigne par B le point d'intersection de ce cercle avec le plan d'équation $z = 0$, dont les coordonnées sont positives. On considère alors le chemin $\vec{\gamma}$ formé par la juxtaposition des trois chemins réguliers suivants:
- le segment de droite joignant l'origine au point A
 - l'arc du cercle $\mathcal{C}$ joignant A à B en restant dans le premier octant
 - le segment de droite joignant B à l'origine.
- On désigne par Γ la courbe décrite ci-dessus, paramétrée de façon injective par le chemin $\vec{\gamma}$. Si $f(x, y, z) = xyz$, calculer

$$\int_{\Gamma} f \, ds.$$

3. On donne

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^6}, \quad g(z) = z^2 \cos\left(\frac{\pi}{z}\right).$$

Pour chacune de ces fonctions, répondre aux questions suivantes.

- Où la fonction est-elle holomorphe?
 - Quels sont ses zéros? Quelles en sont les multiplicités respectives?
 - Quelles sont ses singularités isolées? De quels types sont-elles?
 - Déterminer le résidu en chacune des singularités isolées.
4. Si γ désigne le bord du carré centré en $-2i$, de côté de mesure 2 et orienté dans le sens des aiguilles d'une montre, calculer l'intégrale

$$\int_{\gamma} \frac{\operatorname{Log} z}{(z + 2i)^2} dz.$$

5. Si les intégrales suivantes ont un sens, les calculer par "méthode de variables complexes" (n désigne un naturel strictement positif quelconque)

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{|x|}}{1+x^4} dx$$

6. Répondre par vrai ou faux et justifier la réponse.

- (a) Si f est holomorphe et non constant dans l'ouvert connexe Ω et si $z_0 \in \Omega$ vérifie $|f(z_0)| = \inf_{z \in \Omega} |f(z)|$ alors $f(z_0) = 0$.
- (b) Si z_0 est un pôle d'ordre $p > 0$ pour f , alors

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \Re f(z) = \infty.$$

- (c) Si z_0 est une singularité essentielle pour f alors il existe une suite z_m ($m \geq 1$) qui converge vers z_0 et telle que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} f(z_m) = \infty.$$