Mathématiques générales A, Examen du mardi 06/01/09, 13h-17h

CORRECTION (résumé)

Question de théorie

(i) Quelle est la forme explicite de la dérivée de la fonction arcos**? Démontrer ce résultat.**
(ii) Soit f une fonction de deux variables réelles, définie dans $\mathbb{R}^2$. Quand dit-on que f est dérivable par rapport à sa première variable au point $(1,2)$? Que vaut alors sa dérivée partielle par rapport à la première variable en ce point?

Solution. Voir cours et notes de cours.

Exercices

1. **(a) Résoudre les équations et inéquation suivantes** (pour (ii), (iii) , on suppose que $x \in [0, 2\pi]$)

$$(i)\ x|x^2-1| \leq |x-1|, \qquad (ii)\ \sin x\ \cos x = 1, \qquad (iii)\ 4\sin x\ \cos x = 1.$$

(b) Simplifier au maximum l'expression suivante

$$\sin\left(\arcsin\left(\sin(\frac{5\pi}{3})\right)\right)$$

Solution. (a) (i) L'inéquation est vérifiée pour $x = 1$. Pour $x \neq 1$, puisque $|x^2-1| = |x-1|\ |x+1|$ et que $|x-1| > 0$, elle est équivalente à

$$x|x+1| \leq 1.$$

On a

$$\left\{ \begin{array}{l} x+1 \geq 0 \\ x^2 + x = x|x+1| \leq 1 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left[-1, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} x+1 < 0 \\ -x^2 - x = x|x+1| \leq 1 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad x < -1.$$

Il s'ensuit que les réels qui vérifient l'inéquation sont ceux de l'ensemble

$$\left]-\infty, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right] \bigcup \{1\}.$$

(a) (ii) Comme $2\sin x\ \cos x = \sin(2x)$, l'équation est équivalente à

$$\sin(2x) = 2.$$

L'image de la fonction sinus étant l'intervalle $[-1, 1]$, cette équation n'a pas de solution.

(a) (iii) Comme $2\sin x\ \cos x = \sin(2x)$, l'équation est équivalente à

$$\sin(2x) = \frac{1}{2}.$$

Cela étant, comme $\frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$, les réels x de l'intervalle $[0, 2\pi]$ qui vérifient cette équation sont

$$\frac{\pi}{12}, \ \frac{5\pi}{12}, \ \frac{13\pi}{12}, \ \frac{17\pi}{12}.$$

(b) On a $\sin(\frac{5\pi}{3}) = \sin(-\frac{\pi}{3})$ et $-\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Le fait que les fonctions $\sin x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, et $\arcsin x,\ x \in [-1, 1]$, soient inverses l'une de l'autre conduit alors à

$$\arcsin\left(\sin(\frac{5\pi}{3})\right) = \arcsin\left(\sin(-\frac{\pi}{3})\right) = -\frac{\pi}{3}$$

donc

$$\sin\left(\arcsin\left(\sin(\frac{5\pi}{3})\right)\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2. **Si elles existent, déterminer les limites suivantes**

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}, \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{|1-x|}.$$

Solution. Comme la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x-1}$ est définie sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$, la limite de ses valeurs lorsque x tend vers 1 peut être considérée. Cela étant, on a

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = D\ln(1) = 1$$

car la fonction logarithme est dérivable sur $]0,+\infty[$. (Note: on peut aussi utiliser le théorème de l'Hospital.)

Comme la fonction $x \mapsto \frac{\sqrt{1+x^2}}{|1-x|}$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, ensemble non minoré, on peut envisager la limite de ses valeurs lorsque x tend vers moins l'infini. Cela étant, on a

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{|1-x|} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{\frac{1}{x}+1}}{1-x} = -\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{x}+1}}{\frac{1}{x}-1} = 1.$$

3. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum**

$$\int_0^{\pi/2}\sin x\ \cos^2 x\ dx, \quad \int_0^{+\infty} xe^{-x/2}\ dx.$$

Solution. La fonction $x \mapsto \sin x\ \cos^2 x$ est continue sur $\mathbb{R}$; elle est donc intégrable sur l'intervalle fermé borné $[0,\frac{\pi}{2}]$. Cela étant, on a

$$\int_0^{\pi/2}\sin x\ \cos^2 x\ dx = -\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} D\cos^3 x\ dx = -\frac{1}{3}\left[\cos^3 x\right|_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}.$$

La fonction $x \mapsto xe^{-x/2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t>0$, cette fonction est donc intégrable sur $[0,t]$ et on a (intégration par parties)

$$\begin{aligned}\int_0^t xe^{-x/2}\ dx &= -2\int_0^t xDe^{-x/2}\ dx \\ &= -2te^{-t/2} + 2\int_0^t e^{-x/2}dx = -2te^{-t/2} - 4\left(e^{-t/2}-1\right) \\ &= 4 - 2te^{-t/2} - 4e^{-t/2}\end{aligned}$$

donc

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t xe^{-x/2}\ dx = \lim_{t\to+\infty}\left(4 - 2te^{-t/2} - 4e^{-t/2}\right) = 4.$$

Comme la fonction $xe^{-x/2}$ $(x\geq 0)$, est à valeurs positives, la limite précédente donne son intégrabilité et la valeur de son intégrale sur $[0,+\infty[$

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x/2}\ dx = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t xe^{-x/2}\ dx = 4.$$

4. **On donne la fonction f de manière explicite par**

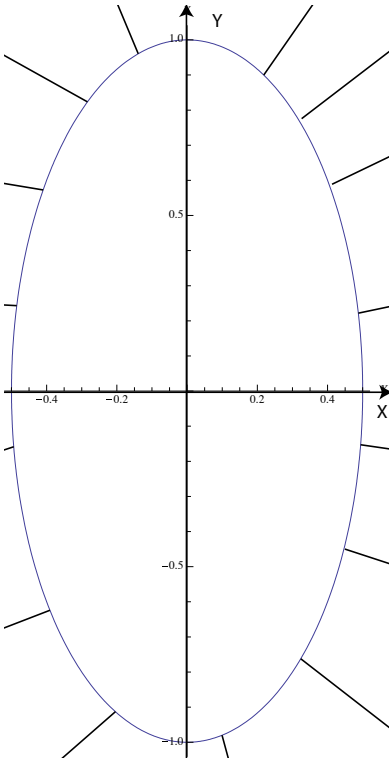
$$f(x,y) = \sqrt{y^2+4x^2-1}.$$

(i) Quel est le domaine de dérivabilité de f? Représenter celui-ci dans un repère orthonormé en le hachurant.
(ii) Si c'est possible, déterminer la valeur des dérivées partielles $(D_x f)(1,0)$ et $(D_x f)(0,1)$. Dans le cas où ce n'est pas possible, en donner la raison.
(iii) On définit F par $F(t) = f\left(\frac{e^t}{2\sqrt{2}}, \frac{e^t}{\sqrt{2}}\right)$. Où cette fonction est-elle dérivable? Déterminer sa forme explicite, ainsi que celle de sa dérivée.

Solution. (i) Comme la fonction racine carrée est dérivable sur $]0, +\infty[$, la fonction f est dérivable sur

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y^2 + 4x^2 - 1 > 0\}.$$

Une représentation graphique de cet ensemble est la suivante: il s'agit de l'"extérieur" de l'ellipse d'équation cartésienne $4x^2 + y^2 = 1$; les points de cette courbe ne sont pas compris dans l'ensemble hachuré.



(ii) Le point de coordonnées cartésiennes $(1,0)$ appartient au domaine de dérivabilité de f et on a

$$D_x f(x,y) = \frac{4x}{\sqrt{y^2 + 4x^2 - 1}}, \quad (D_x f)(1,0) = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{3}.$$

On ne peut déterminer la valeur de l'autre dérivée partielle car le point de coodonnées cartésiennes $(0,1)$ ne fait pas partie du domaine de dérivabilité.

(iii) On a

$$F(t) = \sqrt{\frac{e^{2t}}{2} + \frac{e^{2t}}{2} - 1} = \sqrt{e^{2t} - 1}.$$

Cette fonction F est donc dérivable sur $\{t \in \mathbb{R} \ : \ e^{2t} - 1 > 0\} =]0, +\infty[$ et dans cet ensemble, on a

$$DF(t) = \frac{e^{2t}}{\sqrt{e^{2t} - 1}}.$$

5. **(i) Montrer que la fonction $x \mapsto e^{-e^{-x}}$ vérifie l'équation différentielle**

$$e^x Df(x) - f(x) = 0.$$

(ii) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$9D^2f(x) + 6Df(x) + f(x) = 1$$

Solution. (i) La fonction donnée est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $De^{-e^{-x}} = e^{-e^{-x}}\ e^{-x}$ pour tout x donc

$$e^x De^{-e^{-x}} - e^{-e^{-x}} = 0.$$

(ii) L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène.

L'équation homogène associée est $9D^2f(x) + 6Df(x) + f(x) = 0$; le polynôme caractéristique est $z \mapsto 9z^2 + 6z + 1 = (3z + 1)^2$ et son seul zéro est $-\frac{1}{3}$. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$(c_1x + c_2)e^{-x/3},\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes arbitraires.

On voit immédiatement qu'une solution particulière est la fonction constante 1.

Finalement, les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$1 + (c_1x + c_2)e^{-x/3},\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes arbitraires.

6. **Les courbes de croissance de population du modèle de Gompertz sont les représentations de fonctions exponentielles du type**

$$f(t) = e^{be^{ct}},\ t \in \mathbb{R}$$

où b, c sont des paramètres réels strictement négatifs.
(i) Déterminer la dérivée seconde de f.
(ii) Quelle(s) valeur(s) doit-on donner à b pour que la dérivée seconde de f s'annule en $t = 0$?
(iii) Pour $b = c = -2$, déterminer la limite des valeurs de f aux extrémités de son domaine de définition.

Solution. Quels que soient les paramètres b, c la fonction donnée est indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}$.

(i) On a successivement

$$Df(t) = e^{be^{ct}}\ bce^{ct} = bc\ e^{ct}f(t), \quad D^2f(t) = bc\left(ce^{ct}f(t) + e^{ct}Df(t)\right) = bc^2e^{ct}f(t)\left(1 + be^{ct}\right).$$

(ii) Comme la fonction exponentielle ne s'annule jamais, on a

$$D^2f(0) = 0 \ \Leftrightarrow\ 1 + b = 0 \ \Leftrightarrow\ b = -1.$$

(iii) Pour $b = c = -2$ on a

$$\lim_{t\to-\infty} f(t) = \lim_{t\to-\infty} e^{-2e^{-2t}} = \lim_{y\to+\infty} e^{-2y} = 0$$

et

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty} e^{-2e^{-2t}} = \lim_{y\to0} e^{-2y} = 1.$$

Problème élémentaire

Lors d'une interrogation, un étudiant doit répondre à 100 questions d'un QCM. Pour toute réponse correcte, il obtient 1 point et pour toute réponse incorrecte, on lui retire 0,25 point. Sachant qu'il obtient 53,75 comme cote finale et qu'il est obligé de répondre à toutes les questions, quel est le nombre de réponses correctes fournies?

Solution. Soit x le nombre de réponses correctes fournies. On a

$$x - \frac{1}{4}(100 - x) = 53 + \frac{3}{4}$$

ce qui est équivalent à

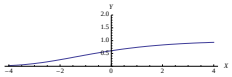
$$\frac{5}{4}x = 53 + \frac{3}{4} + 25 = 78 + \frac{3}{4} = \frac{4 \times 78 \ + \ 3}{4} = \frac{315}{4}.$$

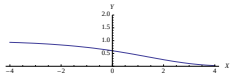
On obtient ainsi que le nombre de réponses correctes est

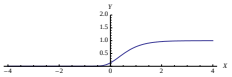
$$x = \frac{315}{5} = 63.$$

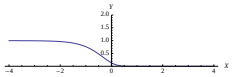
QCM

1. Parmi les graphiques ci-dessous, lequel est celui de la fonction $f(x) = e^{-\frac{e^{-x/2}}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$?


(1)


(2)


(3)


(4)

   1) ♣ graphique 1
   2) graphique 2
   3) graphique 3
   4) graphique 4

2. La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x|x| - 1$ est

   1) paire
   2) impaire
   3) ♣ croisssante
   4) décroissante
   5) aucune des réponses précédentes n'est correcte

3. Si on double la longueur de l'arête d'un cube, l'aire totale des faces de ce cube est

   1) multipliée par 2
   2) ♣ multipliée par 4
   3) multipliée par 6
   4) multipliée par 8
   5) aucune des réponses précédentes n'est correcte

Autre version

Problème élémentaire

Lors d'une interrogation, un étudiant doit répondre à 100 questions d'un QCM. Pour toute réponse correcte, il obtient 1 point et pour toute réponse incorrecte, on lui retire 0,25 point. Sachant qu'il obtient 62,5 comme cote finale et qu'il est obligé de répondre à toutes les questions, quel est le nombre de réponses correctes fournies?

Solution. Soit x le nombre de réponses correctes fournies. On a

$$x - \frac{1}{4}(100 - x) = 62 + \frac{1}{2}$$

ce qui est équivalent à

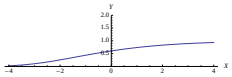
$$\frac{5}{4}x = \frac{125}{2} + 25 = \frac{175}{2}.$$

On obtient ainsi que le nombre de réponses correctes est

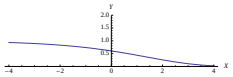
$$x = \frac{175 \times 2}{5} = 70.$$

QCM

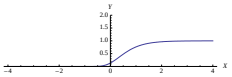
1. Parmi les graphiques ci-dessous, lequel est celui de la fonction $f(x) = e^{-2e^{-2x}},\ x \in \mathbb{R}$?



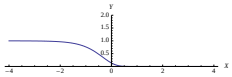
(1)



(2)



(3)



(4)

   1) graphique 1
   2) graphique 2
   3) ♣ graphique 3
   4) graphique 4

2. La fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = |\ln x|$ est

   1) paire
   2) impaire
   3) croisssante
   4) décroissante
   5) ♣ aucune des réponses précédentes n'est correcte

3. Si on double la longueur de l'arête d'un cube, alors le rapport de l'aire totale des faces du cube vis-à-vis de son volume est

   1) multiplié par 2
   2) multiplié par 3
   3) ♣ divisé par 2
   4) divisé par 3
   5) aucune des réponses précédentes n'est correcte