Mathématiques générales **Interrogation du 13/11/08, Correction**

Question de théorie

Enoncer et démontrer la forme explicite de la dérivée de la fonction arcsin.

Solution. Voir cours et notes de cours.

Exercices

Question 1. Déterminer les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0^-} \exp\left(\frac{1}{3x}\right), \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2-1}}, \quad \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ \ln x$$

Solution. • La fonction $x \mapsto \exp\left(\frac{1}{3x}\right)$ est définie sur $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$. On peut donc envisager de déterminer la limite de ses valeurs à gauche en 0, extrémité de l'intervalle ouvert $]-\infty,0[$. Vu les valeurs des limites de la fonction exponentielle aux extrémités de son domaine de définition ($]-\infty,+\infty[$), on a directement

$$\lim_{x\to 0^-} \exp\left(\frac{1}{3x}\right) = \lim_{y\to -\infty} \exp(y) = 0.$$

• La fonction $x \mapsto \dfrac{|x-1|}{\sqrt{x^2-1}}$ est définie sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$. On peut donc envisager de déterminer la limite de ses valeurs en $-\infty$ puisque le domaine de définition n'est pas minoré. Cela étant, pour $x<-1$, on a

$$\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1-x}{-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{\frac{1}{x}-1}{-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$$

donc

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{1}{x}-1}{-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = 1.$$

• La fonction $x \mapsto \sqrt{x}\ \ln x$ est définie sur $]0,+\infty[$. On peut donc envisager de déterminer la limite de ses valeurs à droite de 0 puisque la fonction y est définie. Comme on a $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$, $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ on ne peut cependant pas directement calculer la limite des valeurs de la fonction comme produit des limites de deux facteurs. On écrit alors

$$\sqrt{x}\ \ln x = \frac{\ln x}{x^{-1/2}}.$$

Dans ce cas, les fonctions du numérateur et du dénominateur sont dérivables dans $]0,+\infty[$, la limite de leurs valeurs à droite de 0 est l'infini et la fonction du dénominateur, ainsi que sa dérivée, ne s'annulent pas dans $]0,+\infty[$. On détermine la limite des valeurs du quotient de leur dérivée

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{D\ln x}{Dx^{-1/2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-3/2}} = -2 \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0.$$

et le théorème de l'Hospital donne

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{D\ln x}{Dx^{-1/2}} = 0.$$

Question 2. Où les fonctions suivantes sont-elles dérivables? Déterminer ensuite leur dérivée

$$x \mapsto \cos^3(3x), \qquad x \mapsto e^{\sin^2 x}, \qquad x \mapsto \ln(4x^2+4x+1).$$

Pour quelles valeurs de $x \in [0,2\pi]$ la dérivée de la seconde fonction s'annule-t-elle?

Solution. Comme la fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \cos^3(3x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a
$$D\cos^3(3x) = -9\cos^2(3x)\sin(3x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Comme les fonctions exp et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction composée $x \mapsto e^{\sin^2 x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par

$$D\left(e^{\sin^2 x}\right) = 2e^{\sin^2 x}\sin x\cos x = e^{\sin^2 x}\sin(2x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Cette dérivée est nulle si et seulement si $\sin(2x) = 0$; les valeurs de $x \in [0, 2\pi]$ qui vérifient cette égalité sont $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$.

On a $4x^2 + 4x + 1 = (2x+1)^2$; dès lors, comme la fonction ln est dérivable sur $]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \ln(4x^2 + 4x + 1) = \ln(2x+1)^2 = 2\ln(|2x+1|)$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ et on a

$$D\ln(4x^2 + 4x + 1) = \frac{4}{2x+1},\ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}.$$

Question 3. Simplifier les expressions suivantes au maximum

$$\ln\left(\cos^2\frac{\pi}{3}\right), \quad \sin\left(\frac{\pi\ln\sqrt{e}}{3}\right), \quad \arcsin(\sin\frac{4\pi}{5})$$

Solution. On a

$$\begin{aligned}
\ln\left(\cos^2\frac{\pi}{3}\right) &= 2\ln\left(\cos\frac{\pi}{3}\right) = 2\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -2\ln 2\\
\sin\left(\frac{\pi\ln\sqrt{e}}{3}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\\
\arcsin\left(\sin\frac{4\pi}{5}\right) &= \arcsin\left(\sin\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\pi}{5}.
\end{aligned}$$

Problème élémentaire

Quand l'eau se transforme en glace, son volume augmente de 1/15. Quelle quantité d'eau, exprimée en litres, faut-il pour obtenir 1,28 m^3 de glace?

Solution. Soit x la quantité d'eau demandée, exprimée en litres. Comme 1 m^3 est égal à $1000 = 10^3$ litres, on a
$$\left(1 + \frac{1}{15}\right)x = 1280$$
ou encore
$$\frac{16}{15}x = 16 \times 80$$
Il faut donc $x = 80 \times 15 = 1200$ litres d'eau pour obtenir 1,28m^3 de glace.

Autre version

Un tonneau vide pèse 23 kg. Rempli à moitié d'eau, il pèse 65 kg. Quelle est la capacité en litres de ce tonneau?

Solution. Soit x la capacité du tonneau, exprimée en litres. Considérant qu'un litre d'eau pèse 1 kg, on a
$$23 + \frac{x}{2} = 65$$
c'est-à-dire
$$\frac{x}{2} = 42.$$
La capacité du tonneau est donc $x = 84$ litres.

$\boxed{\boldsymbol{QCM}}$

1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{\sin x}$ est

   1) paire
   2) impaire
   3) croissante
   4) décroissante
   ♣**5)** aucune des réponses précédentes n'est correcte

2. La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x|x| - 1$ est

   1) paire
   2) impaire
   ♣**3)** croisssante
   4) décroissante
   5) aucune des réponses précédentes n'est correcte

3. La somme de deux fonctions décroissantes est toujours une fonction

   1) croissante
   ♣**2)** décroissante
   3) à valeurs positives sur
   4) à valeurs négatives
   5) aucune des réponses précédentes n'est correcte

<u>Autre version du QCM</u>

1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(\pi x)$ est périodique de période

   1) π
   2) 2π
   3) 1
   ♣**4)** 2
   5) aucune des réponses précédentes n'est correcte

2. La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = |x - 1|$ est

   1) paire
   2) impaire
   3) croisssante
   4) décroissante
   ♣**5)** aucune des réponses précédentes n'est correcte

3. Le produit de deux fonctions croissantes est toujours une fonction

   1) croissante
   2) décroissante
   3) paire
   4) impaire
   ♣**5)** aucune des réponses précédentes n'est correcte